

– Tutorium –

# Funkortung und Funknavigation

URL: <http://www.siart.de/lehre/navigation.pdf>

Uwe Siart  
tutorien@siart.de

4. Januar 2015 (Version 1.21)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ausbreitung elektromagnetischer Wellen</b>	<b>4</b>
1.1	Kenngößen . . . . .	4
1.2	Brechung und Funkhorizont . . . . .	8
1.3	Beugung . . . . .	10
1.4	Streuung . . . . .	11
1.5	Bodenreflexion . . . . .	12
1.6	Doppler-Effekt . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Radartechnische Grundlagen</b>	<b>15</b>
2.1	Rückstreuquerschnitt und Radargleichung . . . . .	15
2.2	Funkkoordinaten . . . . .	16
2.3	Entfernungsauflösung . . . . .	17
2.4	Winkelauflösung . . . . .	19
2.5	Dopplerauflösung . . . . .	21
2.6	Auflösung und Genauigkeit . . . . .	22
2.7	Eindeutigkeitsbereich . . . . .	23

<b>3</b>	<b>Ortungsfehler</b>	<b>24</b>
3.1	Wichtige Verteilungsdichten . . . . .	24
3.2	Fehlerellipsen und Fehlerkreis . . . . .	27
3.3	Standlinien-Netz . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Ortungs- und Navigationsverfahren</b>	<b>29</b>
4.1	Begriffe . . . . .	29
4.2	Aufgaben . . . . .	29
4.3	Grundverfahren . . . . .	30
4.4	Frequenzbereiche . . . . .	31
4.5	Hyperbelnavigation . . . . .	32
4.6	Richtungspeilung . . . . .	34
4.7	Dopplerpeiler . . . . .	36
4.8	Very High Frequency Omnidirectional Radio (VOR) . . . . .	38
4.9	Monopuls-Verfahren . . . . .	39
4.10	Instrumentenlandesystem (ILS) . . . . .	40
4.11	Satellitennavigation . . . . .	42

# 1 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

## 1.1 Kenngrößen

Elektrisches und magnetisches Feld<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}(\mathbf{0}) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{Z_F} \mathbf{u} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Wellenzahl und Wellenvektor:

$$\mathbf{k} = k\mathbf{u} = (\beta - j\alpha)\mathbf{u}$$

Phasengeschwindigkeit:

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

<sup>1</sup> $\mathbf{u}$  ist der Einheitsvektor in Richtung der Wellenausbreitung.

Phasenkonstante:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_p} = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$$

Laufzeit:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta r}{v_p} = \Delta r\sqrt{\epsilon\mu}$$

Phasenverschiebung (elektrische Länge):

$$\Delta\varphi = -\beta \Delta r = -\omega \Delta\tau$$

## Kenngrößen (Forts.)

Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{c_0}{f \sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

Feldwellenwiderstand des Vakuums:

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi \Omega \approx 377 \Omega$$

Feldwellenwiderstand:

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z_{F0} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$

Poynting-Vektor:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})\}$$

Strahlungsleistungsdichte:

$$S_* = |\mathbf{S}| = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{E}|^2}{Z_F} = \frac{1}{2} |\mathbf{H}|^2 Z_F$$

Eindringtiefe:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \kappa \mu_0 \mu_r}}$$

## Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit

Untergrund	Dielektrizitätskonstante $\epsilon_r$	Leitfähigkeit $\kappa$ (S/m)
Meerwasser	80	1 – 5
Süßwasser	80	$10^{-2} - 10^{-3}$
Eis	3	$10^{-5}$
feuchtes Gelände	5 – 15	$10^{-2} - 10^{-3}$
trockenes Gelände	2 – 6	$10^{-3} - 5 \cdot 10^{-5}$

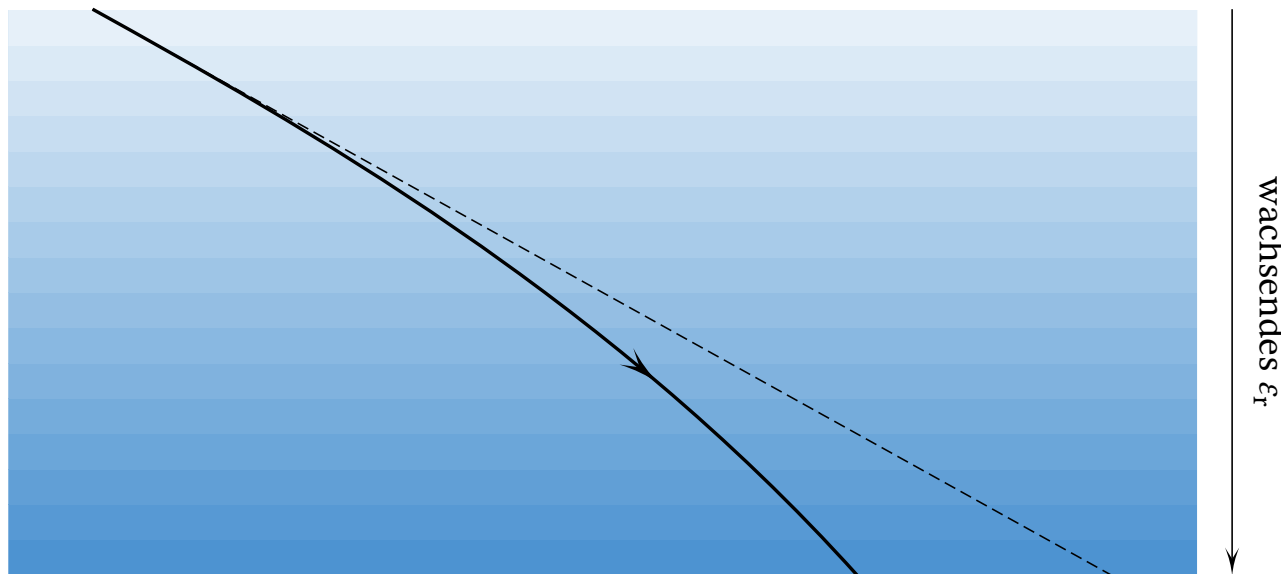
## Eindringtiefe $\delta_0$ in m

Frequenz	Seewasser $\epsilon_r = 80 ; \kappa = 4 \text{ S/m}$	feuchtes Gelände $\epsilon_r = 10 ; \kappa = 10^{-2} \text{ S/m}$	mittleres Gelände $\epsilon_r = 5 ; \kappa = 10^{-3} \text{ S/m}$
10 kHz	2,5	50	150
100 kHz	0,80	15	50
1 MHz	0,14	5	17
10 MHz	0,08	2	9

Funknavigation von Unterseebooten ist wegen der hohen Leitfähigkeit von Seewasser nur bei tiefen Frequenzen im unteren Kilohertzbereich möglich.

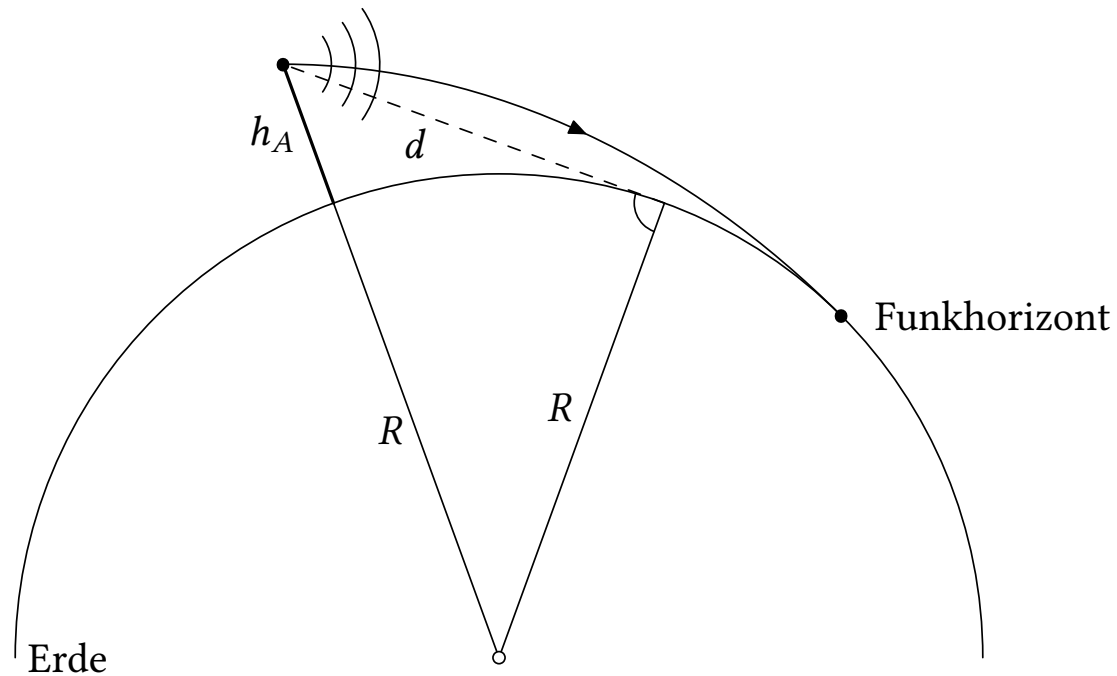
## 1.2 Brechung und Funkhorizont

In inhomogenen Medien wird die Ausbreitungsrichtung elektromagnetischer Wellen zum optisch dichteren Medium (größeres  $\epsilon_r$ ) hin gekrümmt.



In der Atmosphäre nimmt die Brechzahl  $n = \sqrt{\epsilon_r}$  von  $n = 1,0000$  im Weltraum mit wachsendem Luftdruck bis auf  $n = 1,0003$  auf der Erdoberfläche zu.



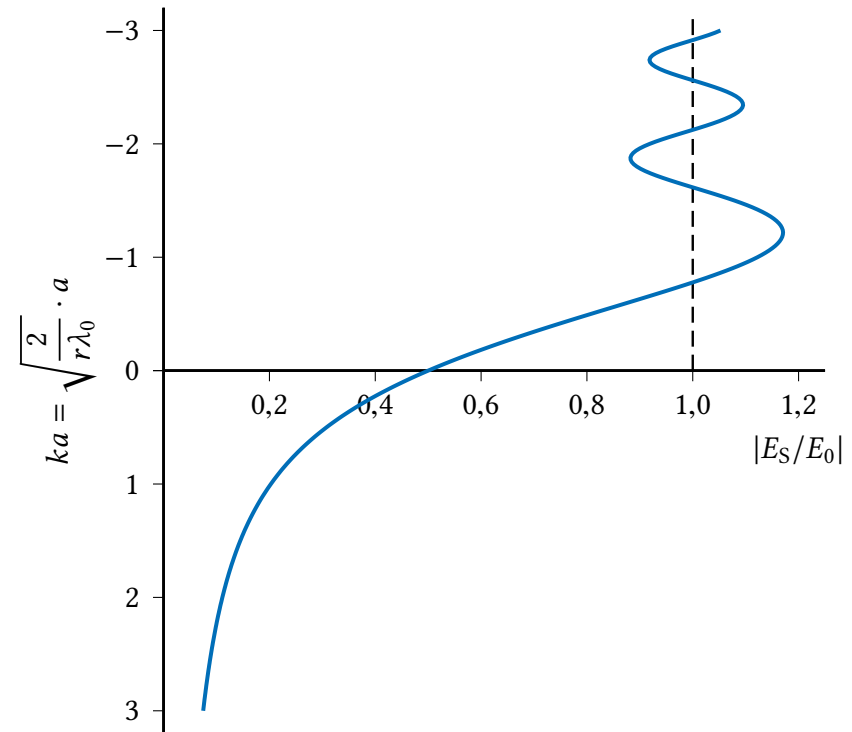
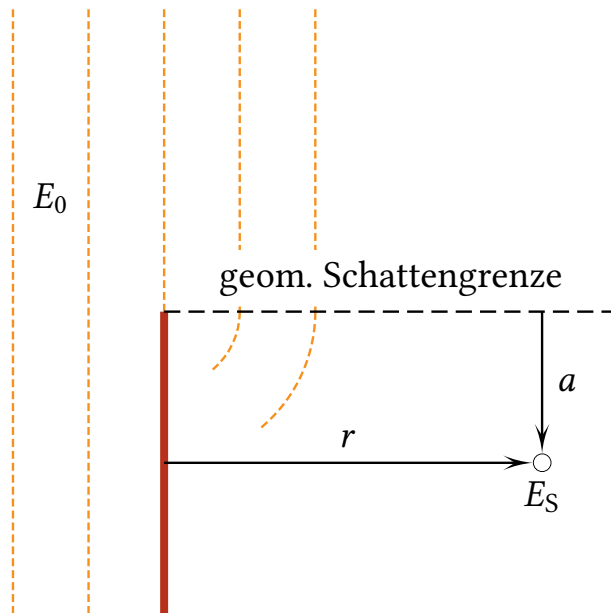


Der Funkhorizont

$$d_{\text{Funk}} = \sqrt{2 \cdot k_E \cdot R \cdot h_A}$$

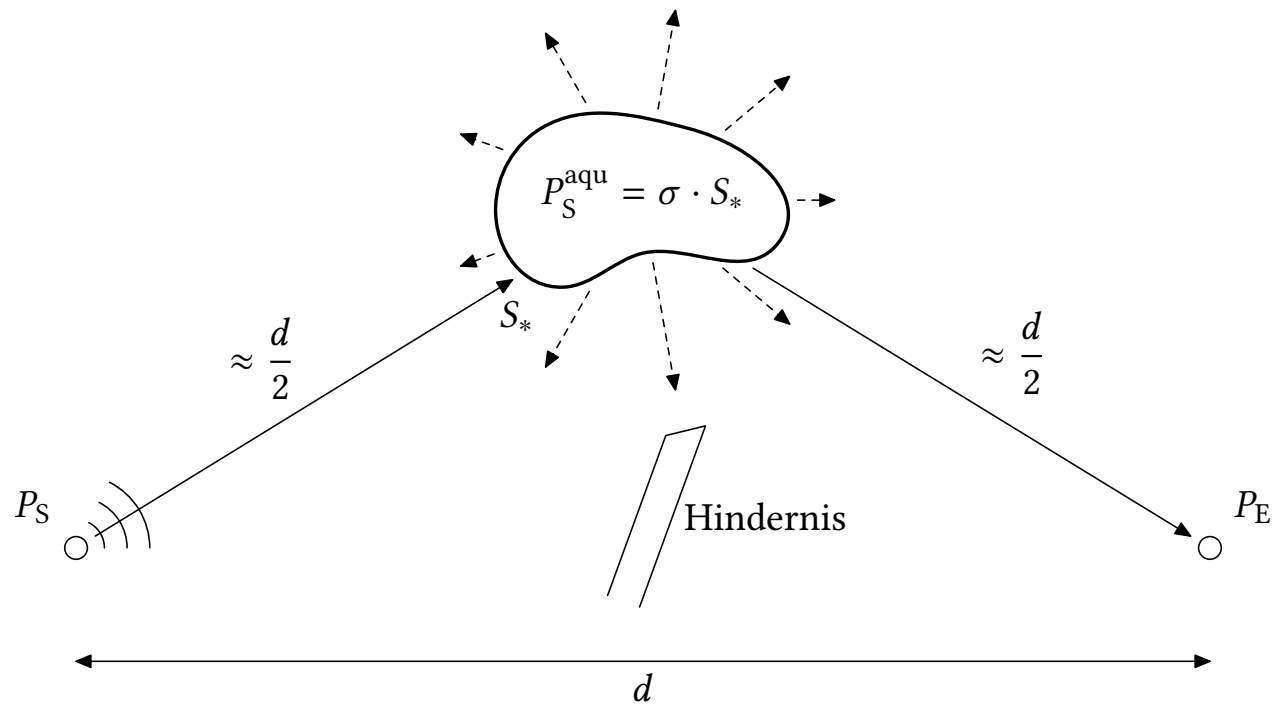
ist daher weiter als der geometrische Horizont. Der *Krümmungsfaktor* ist  $k_E = 4/3$ .

## 1.3 Beugung



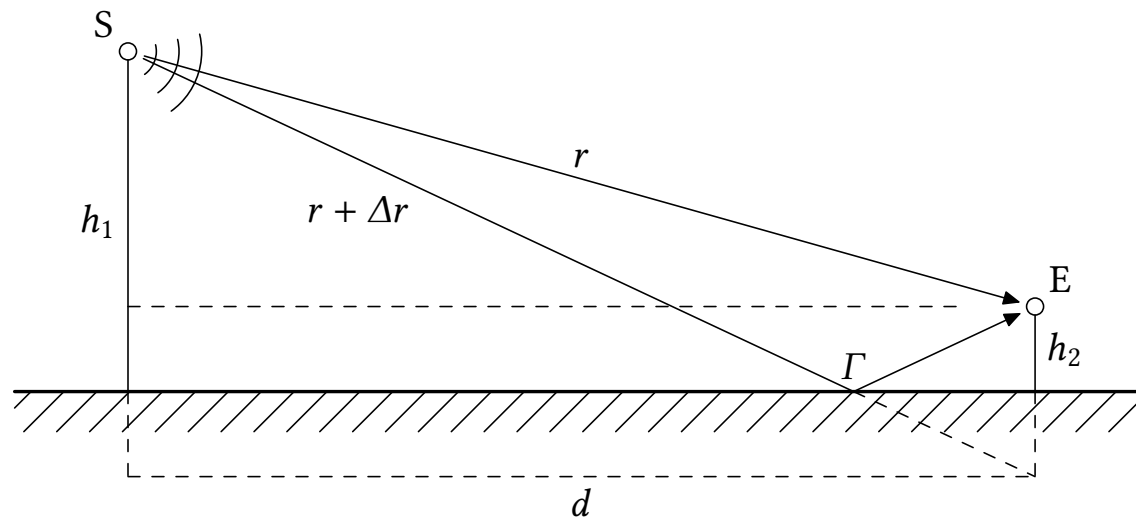
Die Beugung an einer leitenden Halbebene wird beschrieben durch den normierten Parameter  $ka = \sqrt{2/(r \lambda_0)} \cdot a$  und durch die dargestellte Funktion  $|E_S/E_0| = f(ka)$ .

## 1.4 Streuung



$$\frac{P_E}{P_S} = G_E G_S \frac{\lambda_0^2}{4\pi^3 d^4} \sigma \propto \frac{1}{d^4}$$

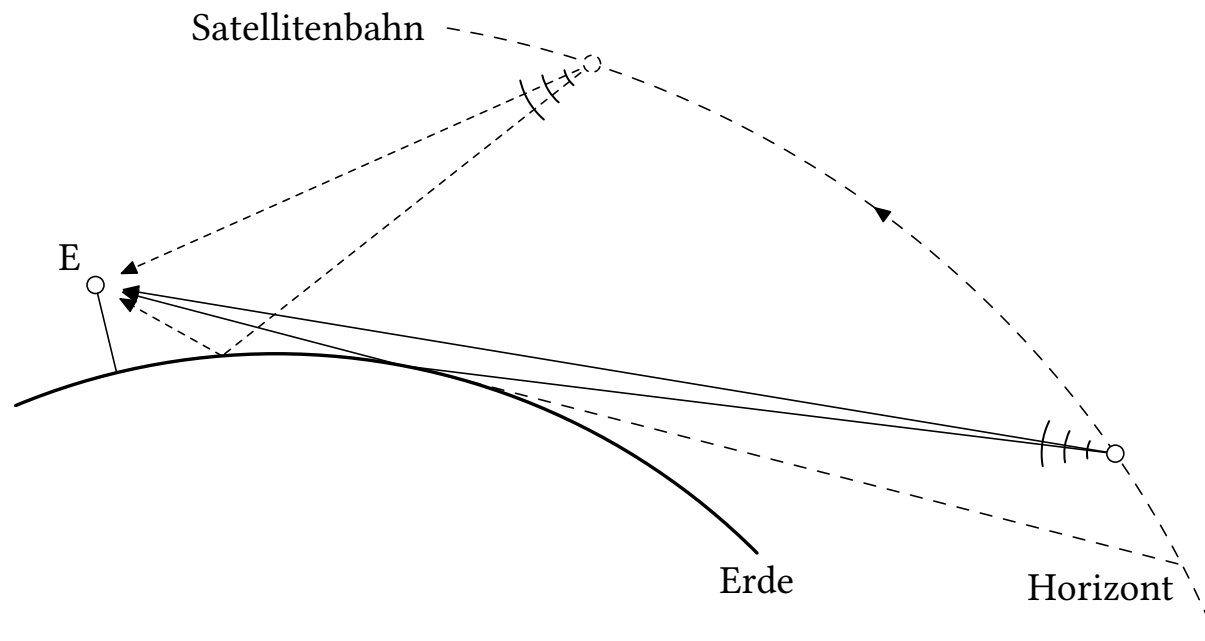
## 1.5 Bodenreflexion



Die Reflexion unter streifendem Einfall erfolgt näherungsweise mit Betrag 1 und mit  $180^\circ$  Phasensprung ( $\Gamma \approx -1$ ). Direkter und reflektierter Anteil löschen sich am Empfängerort nahezu aus.

$$\frac{P_E}{P_S} = G_E G_S \frac{(h_1 h_2)^2}{d^4} \propto \frac{1}{d^4}$$

## Bodenreflexion



Wegen der Zweiwegeausbreitung durch Reflexion an der Erdoberfläche haben Satellitensignale meist erst dann ausreichenden Pegel, wenn der Satellit mehr als  $10^\circ$  über dem Horizont steht.

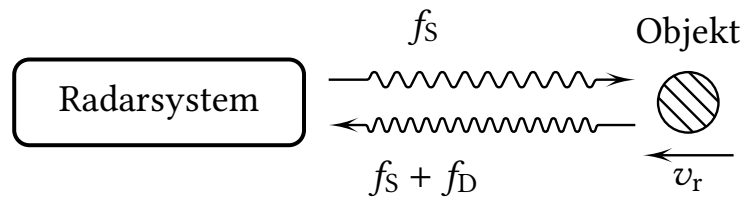
## 1.6 Doppler-Effekt

Empfangsfrequenz bei Relativbewegung (Relativgeschwindigkeit  $v_r$ ):

$$\omega_E = \frac{d\phi}{dt} = \omega_S - \beta_0 \frac{dr(t)}{dt} = \omega_S + \omega_D \quad ; \quad r(t): \text{Länge des Signalweges .}$$

### Radar

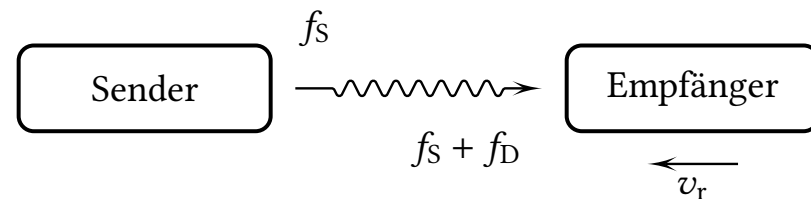
$$r(t) = 2(r_0 - v_r t)$$



$$f_D = f_s \cdot \frac{2 \cdot v_r}{c_0}$$

### Kommunikation

$$r(t) = r_0 - v_r t$$



$$f_D = f_s \cdot \frac{v_r}{c_0}$$

## 2 Radartechnische Grundlagen

### 2.1 Rückstreuquerschnitt und Radargleichung

Strahlungsleistungsdichte:

$$S_* = \frac{G \cdot P_S}{4\pi r^2}$$

Rückstreuquerschnitt:

$$\sigma = \frac{P_{S,\text{äqu}}}{S_*} \quad ; \quad [\sigma] = \text{m}^2$$

Antennenwirkfläche:

$$A_W = G \cdot \frac{\lambda_0^2}{4\pi}$$

Empfangsleistung:

$$P_E = A_W \cdot \frac{P_{S,\text{äqu}}}{4\pi r^2}$$

Radargleichung:

$$\frac{P_E}{P_S} = \frac{G^2 \lambda_0^2}{(4\pi)^3 r^4} \cdot \sigma$$

$S_*$	am Ort des Streuers einfallende Strahlungsleistungsdichte
$P_{S,\text{äqu}}$	äquivalente, am Ort des Streuers isotrop abgestrahlte Sendeleistung
$\sigma$	Rückstreuquerschnitt
$P_S$	Sendeleistung
$P_E$	Empfangsleistung
$G$	Antennengewinn
$\lambda_0$	Freiraum-Wellenlänge
$r$	Zielabstand

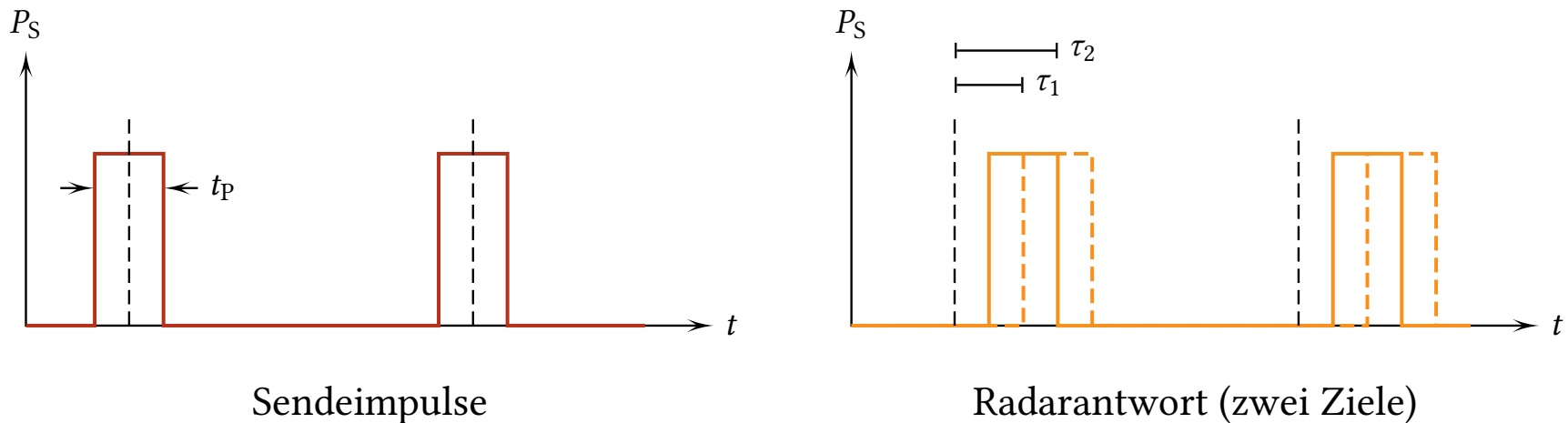
## 2.2 Funkkoordinaten

<b>Funkkoordinate</b>	Messung durch	Auflösung begrenzt durch
<b>Entfernung</b>	Signallaufzeit (Puls oder PN-Code)	Signalbandbreite
	Frequenzgang der Reflexion	Signalbandbreite
<b>Richtung (Winkel)</b>	Antennenbündelung	Antennengröße
	Strahlergruppe	Antennengröße
	Monopulsverfahren	–
<b>Radialgeschwindigkeit</b>	Empfangsfrequenz (Dopplereffekt)	Messzeit

Die Möglichkeiten eines Radarsystems sind außer von Signalerzeugung und Signalverarbeitung wesentlich von der Antenne (Bandbreite und Baugröße) bestimmt.



## 2.3 Entfernungsauflösung

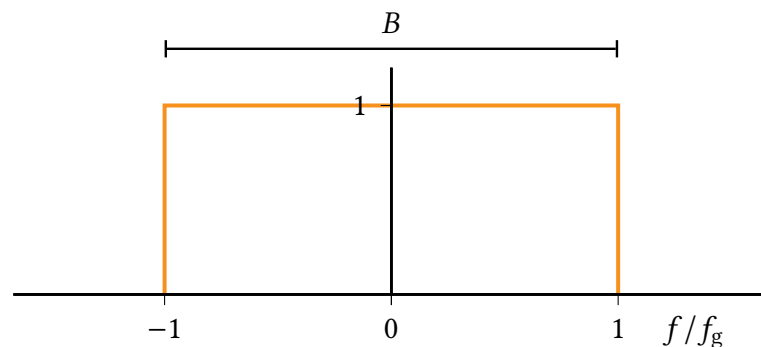


Zwei Ziele können getrennt detektiert werden, wenn  $\tau_2 - \tau_1 \geq t_p$ . Für den Abstand  $\Delta r$  zwischen den Zielen folgt daraus

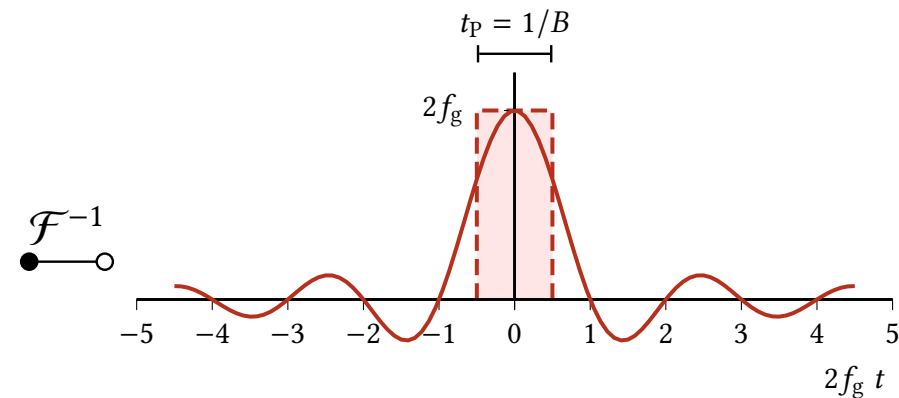
$$\Delta r = \frac{c_0 \cdot t_p}{2} = \frac{c_0}{2B}$$

**Zahlenbeispiel:** Für eine Entfernungsauflösung von  $\Delta r = 50$  cm darf die Impulsdauer maximal  $t_p = 3,33$  ns betragen.

## Entfernungsauflösung



Spektrum



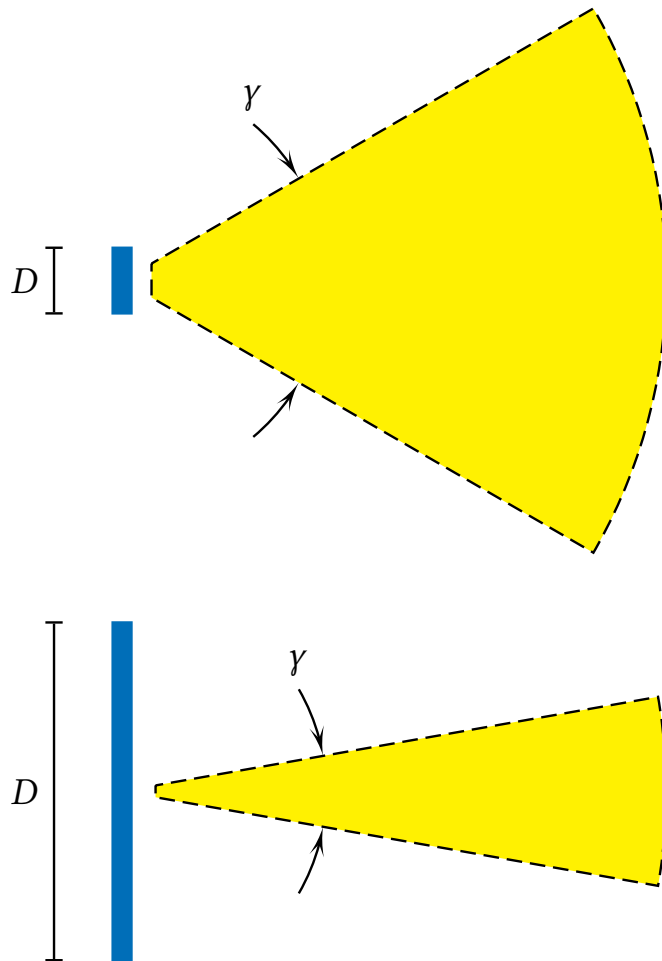
Impulsform

Die gleiche Beziehung gilt bei Messung des Reflexionsfaktors im Frequenzbereich (z. B. stepped-frequency CW).

$$\Delta r = \frac{c_0 \cdot t_P}{2} = \frac{c_0}{2B}$$

**Zahlenbeispiel:** Für eine Entfernungsauflösung von  $\Delta r = 50$  cm ist die Signalbandbreite  $B = 300$  MHz erforderlich.

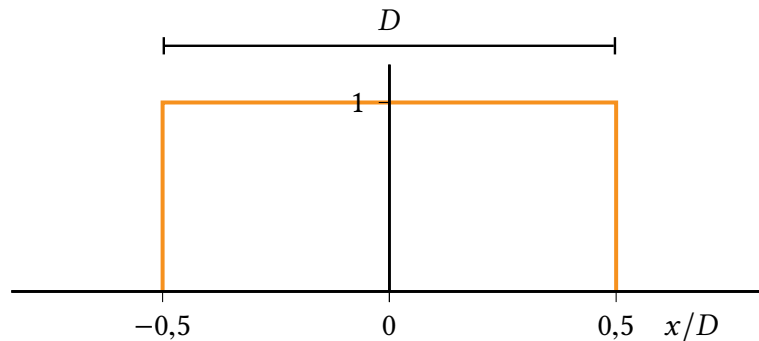
## 2.4 Winkelauflösung



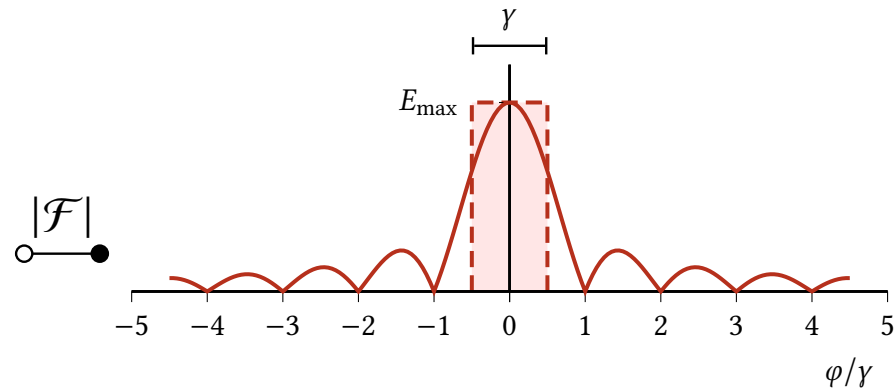
Zwischen der Bündelung einer Antenne und der erforderlichen Baugröße besteht ebenfalls ein grundsätzlicher (Fourier-)Zusammenhang:

Je kleiner der Öffnungswinkel, desto größer die erforderliche Aperturabmessung in Wellenlängen.

## Winkelauflösung



Aperturbelegung



Richtcharakteristik

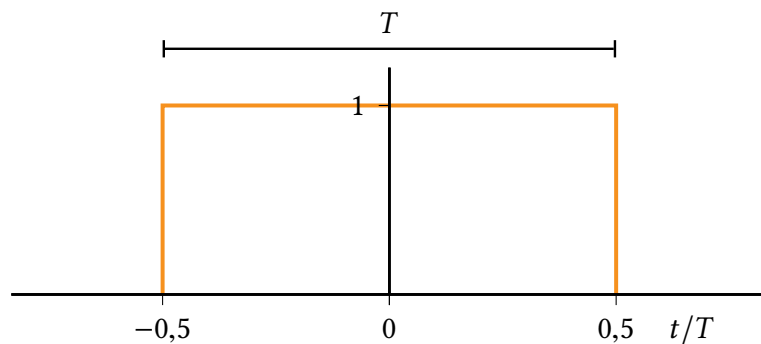
Abschätzung der Halbwertsbreite (3-dB-Breite) und der Winkelauflösung (Zweiwegediagramm, 1,5-dB-Breite):

$$\gamma_{3\text{dB}} \approx 70^\circ \cdot \frac{\lambda_0}{D}$$

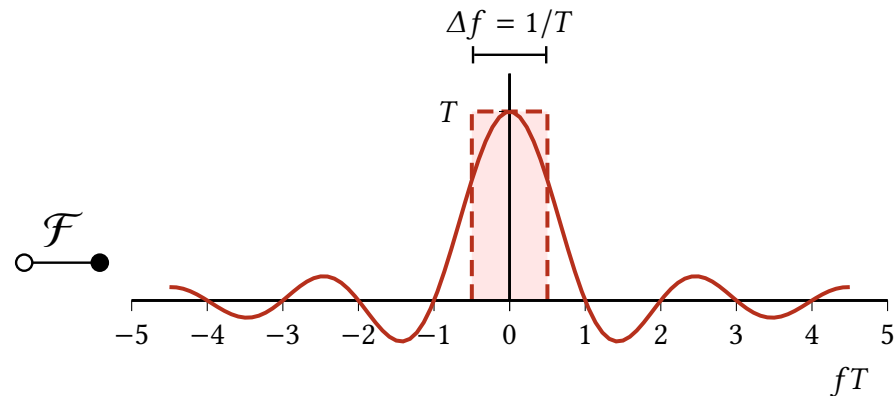
$$\Delta\varphi \approx 50^\circ \cdot \frac{\lambda_0}{D}$$

**Zahlenbeispiel:** Für eine Winkelauflösung von  $\Delta\varphi = 5^\circ$  ist in etwa eine Antenne von der Größe  $D = 10\lambda_0$  erforderlich. Mit zunehmender Frequenz kann die Antennenbaugröße bei gleicher Bündelung also kleiner werden.

## 2.5 Dopplerauflösung



Messdauer



Linienbreite

Die spektrale Linienbreite ist umgekehrt proportional zur Messdauer:

$$\Delta f = \frac{1}{T}.$$

**Zahlenbeispiel:** Für eine Dopplerauflösung von  $\Delta f = 100 \text{ Hz}$  ist eine Messdauer von  $T = 10 \text{ ms}$  erforderlich.

## 2.6 Auflösung und Genauigkeit

**Auflösung** Der *kleinste Abstand*, den zwei Ziele in einer Funkkoordinate haben dürfen, damit sie als getrennte Ziele erkannt werden.

$$\Delta r = \frac{c_0}{2B} \qquad \Delta \varphi = 50^\circ \cdot \frac{\lambda_0}{D}$$

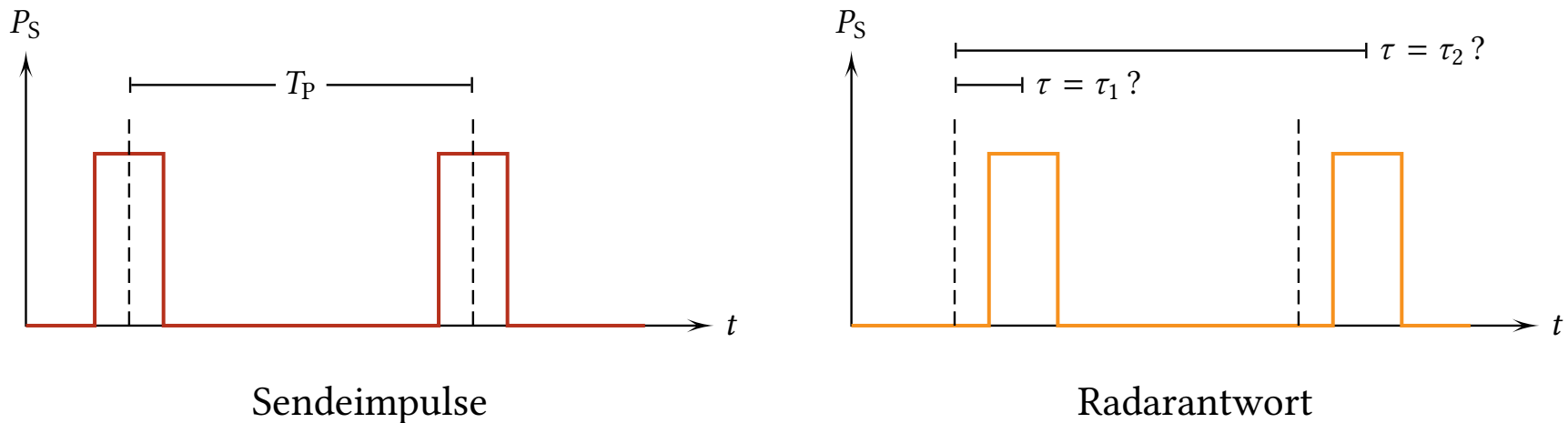
Wesentlich sind hier die Signalbandbreite  $B$  und/oder die Aperturgröße  $D$ .

**Messgenauigkeit** Der *kleinste Messfehler*, mit dem eine Funkkoordinate bestimmt werden kann.

$$\delta r = \tau_p \frac{c_0}{2\sqrt{2S/N}}$$

$\tau_p$  ist die Anstiegszeit der Impulsflanke. Wesentlich sind hier Signalleistung und Empfängerempfindlichkeit. Bei statistischen Störungen kann hoher Störabstand  $S/N$  auch durch eine hohe Messzeit erreicht werden (Mittelung).

## 2.7 Eindeutigkeitsbereich



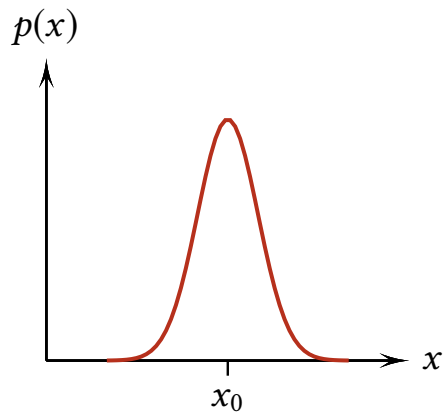
Die Laufzeit-Zuordnung ist eindeutig, solange alle Antwortimpulse vor der Aussendung des nächsten Sendepulses eintreffen. Damit ist der Eindeutigkeitsbereich

$$r_E = \frac{c_0 \cdot T_P}{2}.$$

**Zahlenbeispiel:** Bei einer Pulswiederholfrequenz von  $1/T_P = 1 \text{ MHz}$  ist der Eindeutigkeitsbereich  $r_E = 150 \text{ m}$ .

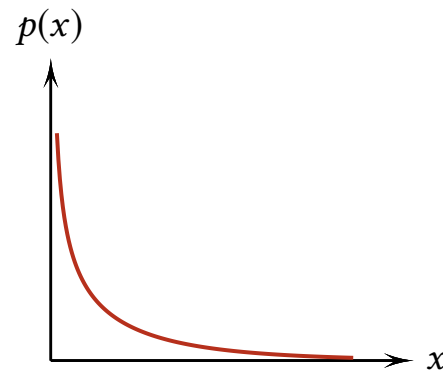
## 3 Ortungsfehler

### 3.1 Wichtige Verteilungsdichten



Gaußverteilung

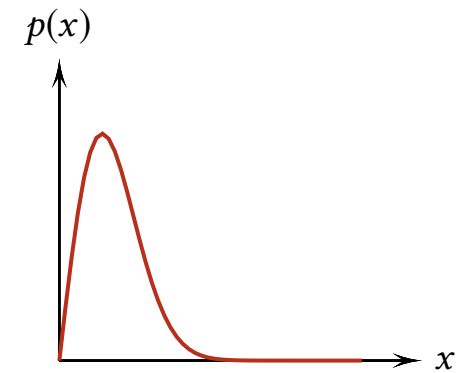
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$



$\chi^2$ -Verteilung

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu x}} \cdot e^{-\frac{x}{\mu}}$$

für  $x > 0$

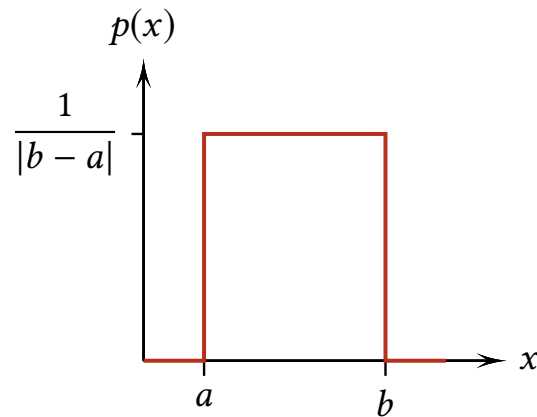


Rayleighverteilung

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

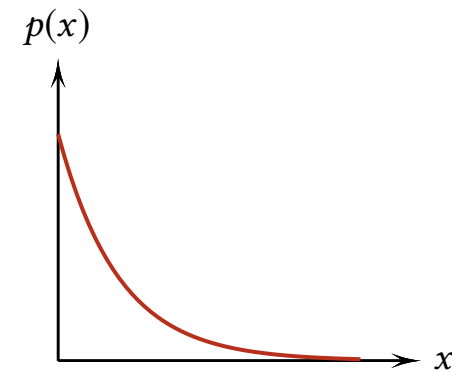


## Wichtige Verteilungsdichten



Gleichverteilung

$$p(x) = \frac{\delta_{-1}(x-a) - \delta_{-1}(x-b)}{|b-a|}$$



Exponentialverteilung

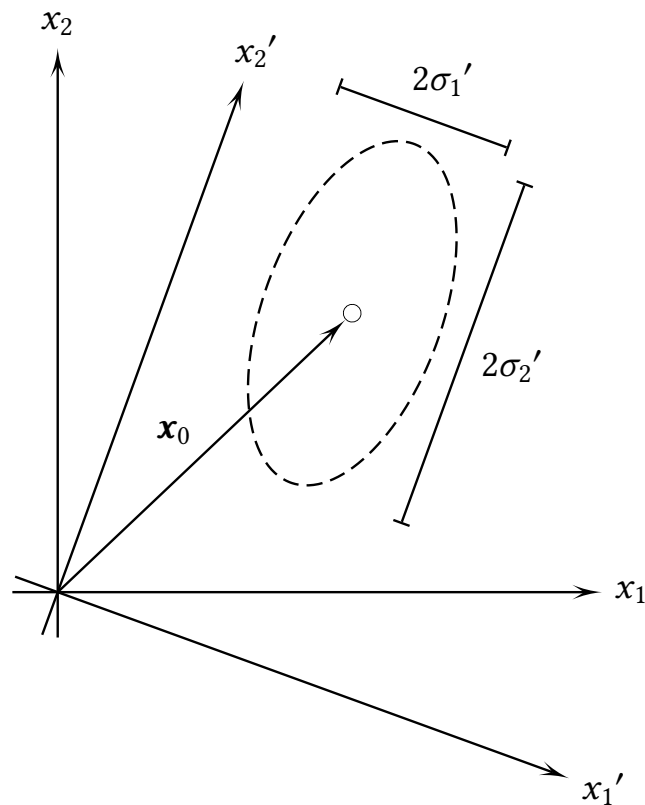
$$p(x) = \frac{1}{\mu} \cdot e^{-\frac{x}{\mu}}$$

für  $x \geq 0$

## Beispiele aus der Signalverarbeitung

- Gaußverteilung** entsteht, wenn sich eine große Anzahl statistisch unabhängiger, gleichverteilter Prozesse zu einem Summenprozess überlagert (zentraler Grenzwertsatz).
- $\chi^2$ -Verteilung** entsteht, wenn eine gaußverteilte Zufallsvariable über eine quadratische Kennlinie transformiert wird.
- Rayleighverteilung** ist die Verteilungsdichte der Einhüllenden eines stationären, gaußverteilten Schmalbandprozesses.
- Gleichverteilung** ist die Verteilungsdichte des Quantisierungsfehlers, der durch Analog-Digital-Wandlung entsteht.
- Exponentialverteilung** entsteht, wenn die Einhüllende eines stationären, gaußverteilten Schmalbandprozesses mit einer quadratischen Kennlinie detektiert wird.

## 3.2 Fehlerellipsen und Fehlerkreis



Durch Hauptachsentransformation lassen sich Koordinatenrichtungen  $(x'_1, x'_2)$  finden, für die  $x'_1$  und  $x'_2$  unkorreliert sind.

Wahrscheinlichkeiten  $p$  dafür, dass der wahre Standort innerhalb einer Ellipse mit den Halbachsen  $a = \xi\sigma_x$  und  $b = \xi\sigma_y$  liegt:

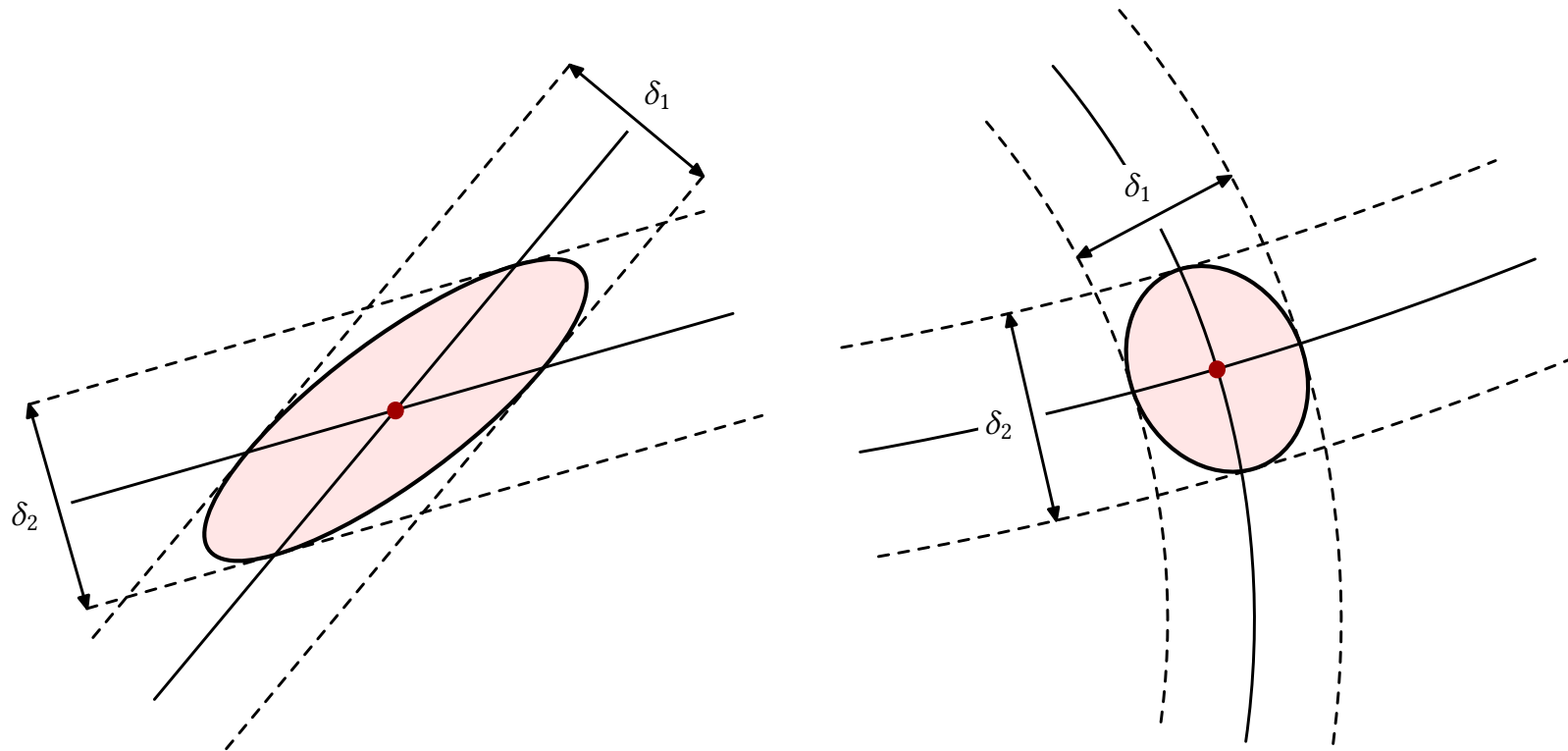
$\xi$	$p$
1	39,3 %
2	86,5 %
3	98,9 %

Der Radius

$$R_{\text{RMS}} = \sqrt{\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2}$$

eines Fehlerkreises mit  $63\% \leq p \leq 68\%$  ist auch dann sinnvoll, wenn  $\sigma_v' \rightarrow 0$ .

### 3.3 Standlinien-Netz



Standlinien sollten sich möglichst senkrecht schneiden. Spitze Schnittwinkel sind ungünstig.

## 4 Ortungs- und Navigationsverfahren

### 4.1 Begriffe

- a) Eigenortung    b) Fremdortung    c) Navigation  
d) Standfläche    e) Standlinie    f) Standort

### 4.2 Aufgaben

- Messungen und Berechnungen, die zur Bestimmung des augenblicklichen Ortes und der augenblicklichen Geschwindigkeit notwendig sind.
- Vorhersage des Weges eines Fahrzeugs unter Beibehaltung des augenblicklichen Bewegungszustandes.
- Berechnung der notwendigen Manöver, um ein vorgegebenes Ziel zu erreichen.

## 4.3 Grundverfahren

Prinzip	Beispiel
<b>Laufzeit</b>	
Einwegverfahren	GPS, GLONASS
Zweiwegverfahren	DME, Pulsradar
<b>Phasendifferenz</b>	
Codemäßige oder zeitliche Trennung der Signale	OMEGA, LORAN
Frequenzmäßige Trennung der Signale	DECCA
<b>Amplitude</b>	
Drehung einer Richtantenne (Max.- oder Min.-Peilung)	ADF, Radar
Auswertung eines Differenzdiagramms	Monopuls
konstanter Umlauf einer bekannten Richtcharakteristik	VOR
Schwenken einer Richtcharakteristik in begrenztem Sektor	MLS
richtungsabhängige Modulationsgrad-Diagramme	ILS
<b>Frequenz</b>	
Auswertung der Dopplerinformation	Dopplernavigator

## 4.4 Frequenzbereiche

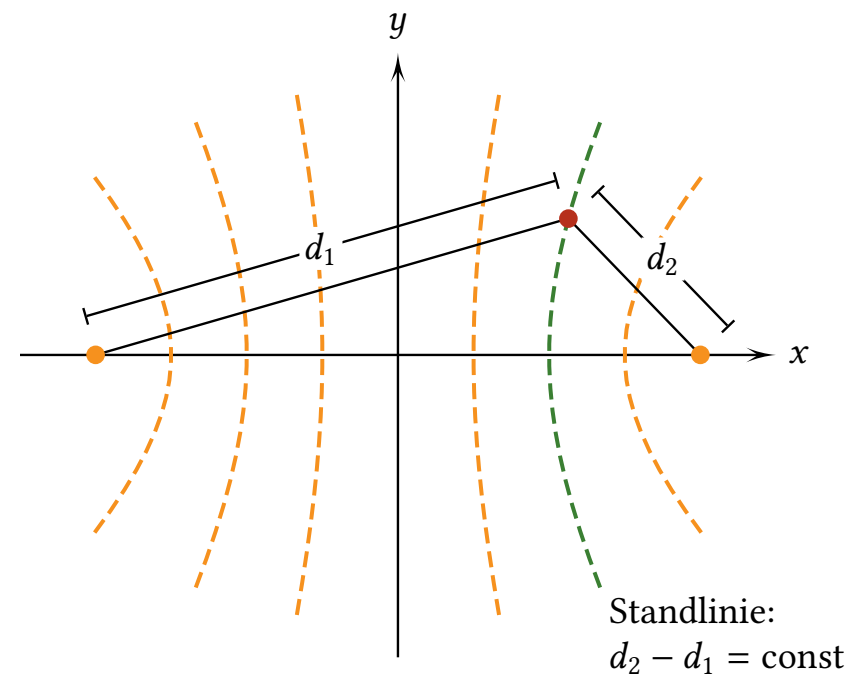
Frequenzband	Navigationsverfahren	Frequenzband	Navigationsverfahren
10 kHz... 14 kHz	OMEGA	225 MHz... 400 MHz	Peiler, militärisch
70 kHz... 130 kHz	DECCA, LORAN-C/D	328 MHz... 335 MHz	ILS-Gleitweg
190 kHz... 375 kHz	CONSOL	960 MHz... 1215 MHz	TACAN, DME, Sekundär-Radar
255 kHz... 415 kHz	Flug- und Seefunkfeuer	600 MHz, 1300 MHz, 2,8 GHz, 10 GHz, 15,5 GHz, 38 GHz	Bordradar, Wetterradar, Flugfeldüberwachung
1750 kHz... 1950 kHz	LORAN-A	1574,42 MHz, 1227,6 MHz	GPS, GLONASS, GALILEO
73,8 MHz... 75,2 MHz	Markierungs-Funkfeuer	5,0 GHz... 5,25 GHz	Mikrowellenlandesys- tem (MLS, TRSB)
108 MHz... 118 MHz	ILS-Landekurs, VOR, Doppler-VOR	440 MHz, 1630 MHz, 4,3 GHz	Radarhöhenmesser
118 MHz... 136 MHz	Peiler, zivil	8,75 GHz... 8,85 GHz 13,25 GHz... 13,4 GHz	Dopplernavigator

## 4.5 Hyperbelnavigation

Eine Basis besteht aus einem Leitsender und einem Nebensender.

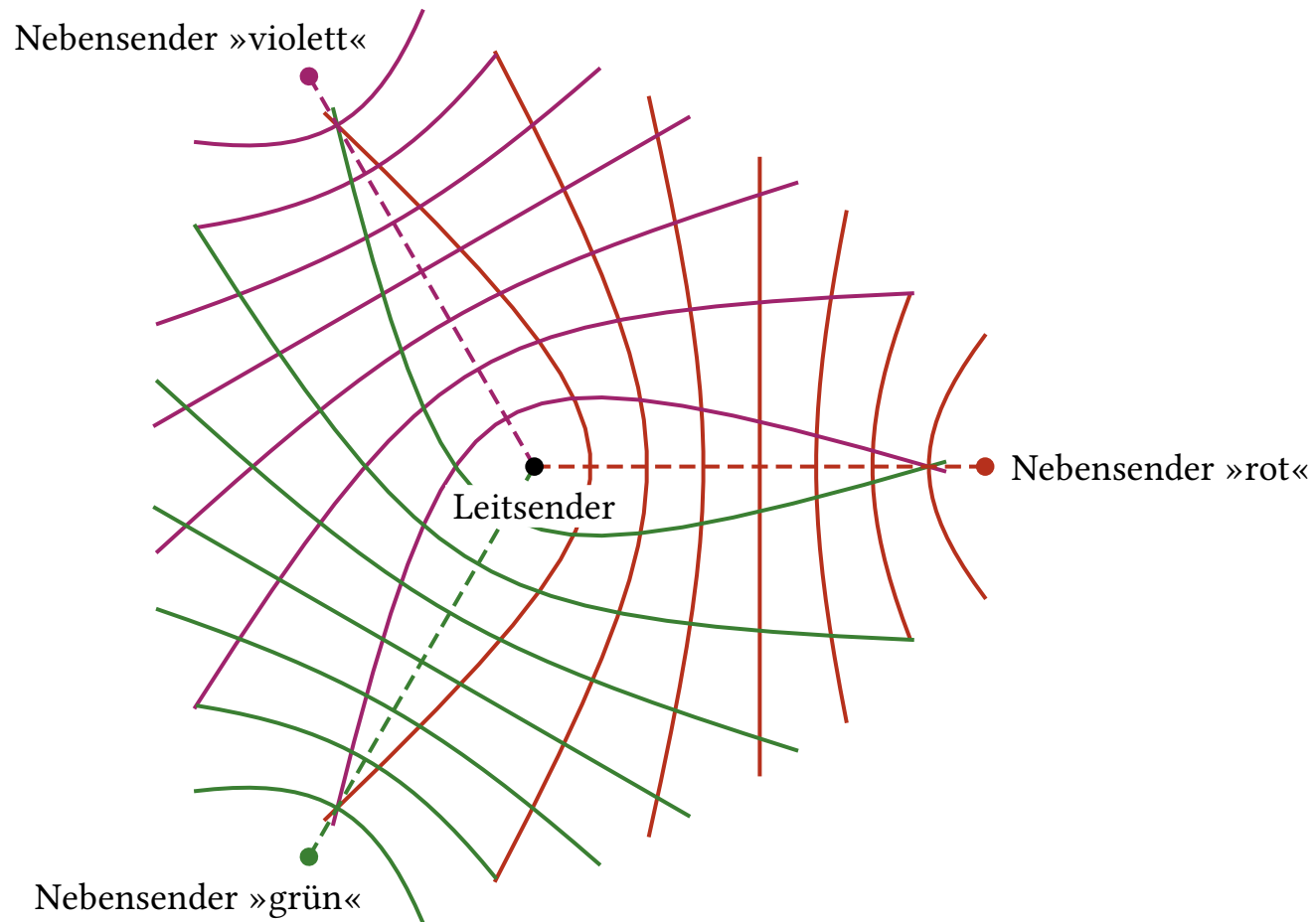
Bestimmung von  $d_2 - d_1$  durch Phasendifferenz (DECCA) oder Puls-Laufzeitdifferenz (LORAN).

Standortbestimmung durch drei Hyperbelscharen (höhere Genauigkeit) benötigt einen Leitsender und drei Nebensender (»Kette«).

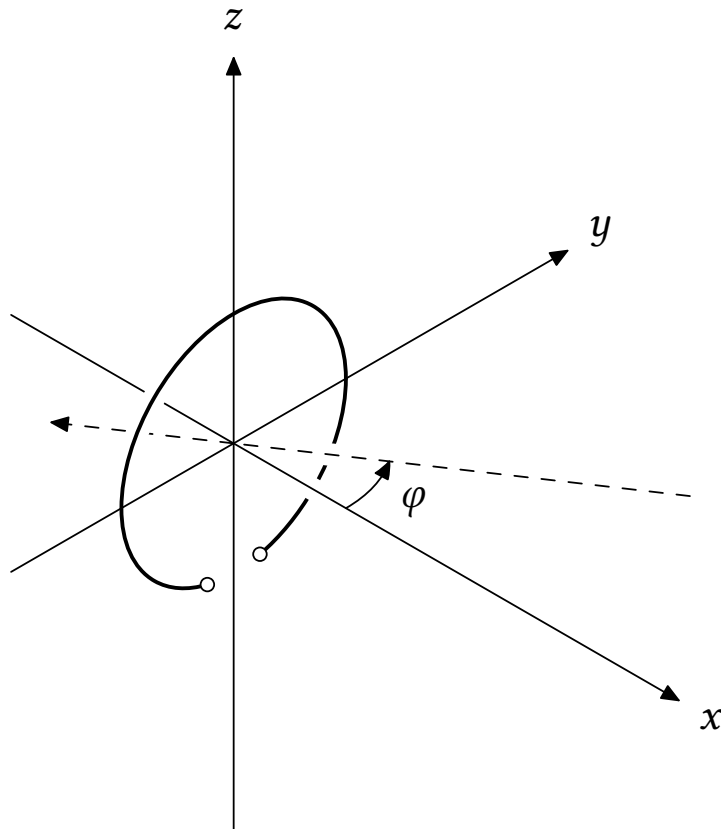




## DECCA-Kette



## 4.6 Richtungspeilung



Leerlaufspannung einer Rahmenantenne (Abmessung  $D \ll \lambda_0$ , Einfallsebene ist die  $xy$ -Ebene, Polarisation in  $z$ -Richtung):

$$U_0 \approx j\omega\mu_0 H_0 \cdot A \cdot \sin \varphi$$

$$= j\beta_0 E_0 \cdot A \cdot \sin \varphi .$$

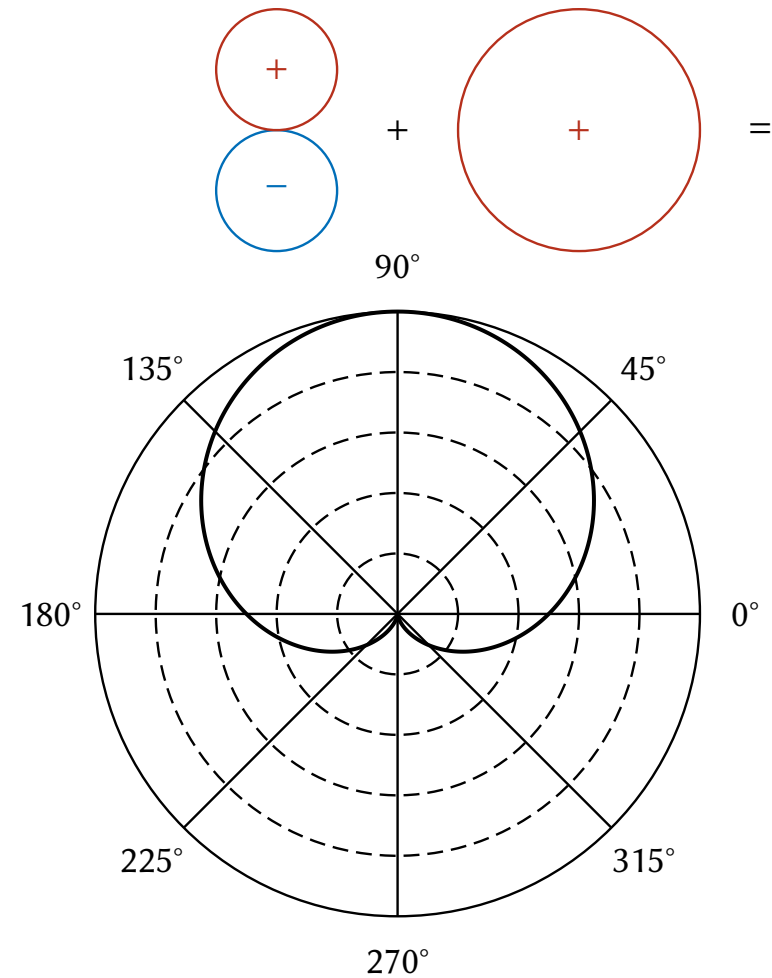
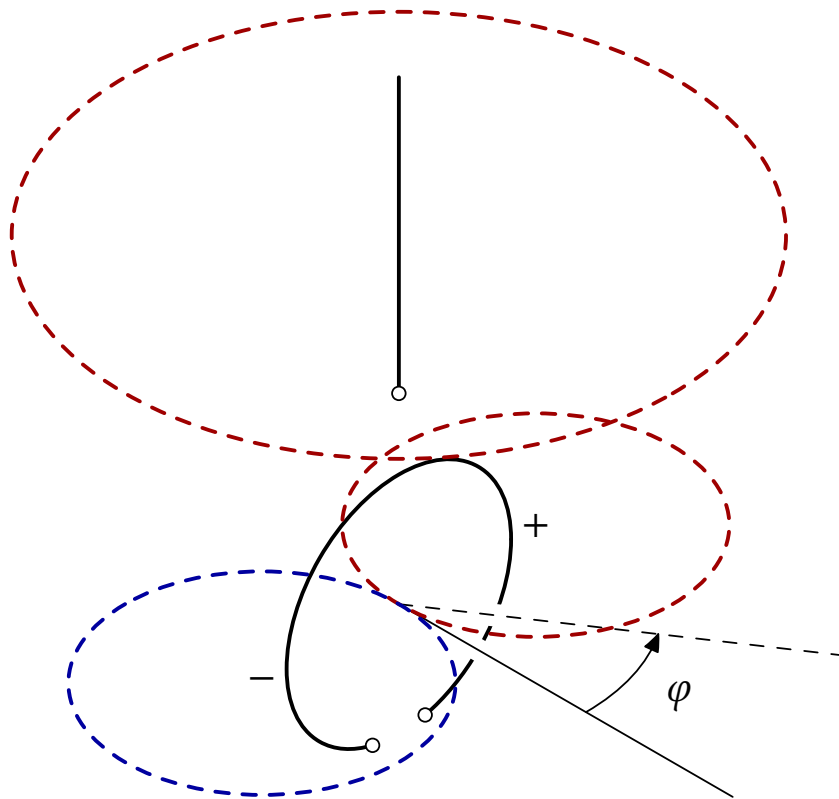
Leerlaufspannung einer Monopol-Antenne (Polarisation in  $z$ -Richtung):

$$U_0 = \ell_{\text{eff}} E_0 .$$

Die Rahmenspannung eilt der Monopolspannung um  $90^\circ$  vor. Zur Addition der Empfangsspannungen ist daher ein  $90^\circ$ -Phasenschieber notwendig.

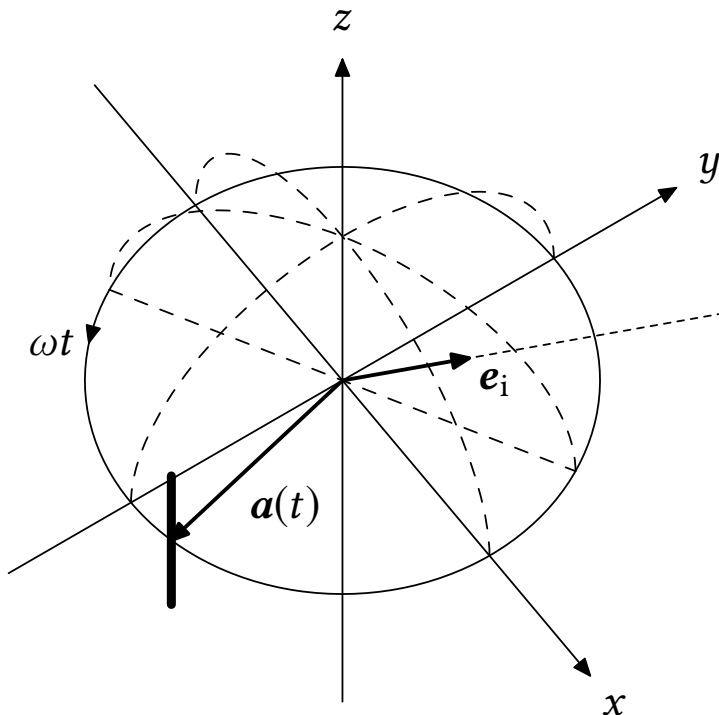
## Richtungspeilung

Richtcharakteristik einer Kombination aus Monopol- und Rahmenantenne:



## 4.7 Dopplerpeiler

Eine auf einer Kreisbahn mit der Kreisfrequenz  $\omega$  umlaufende Antenne:



$$\Delta s(t) = \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{e}_i = a \sin \vartheta \cos(\omega t - \varphi).$$

Empfangsspannung:

$$u_E(t) = U_E \cos(\omega_s t + \beta_0 \Delta s(t)).$$

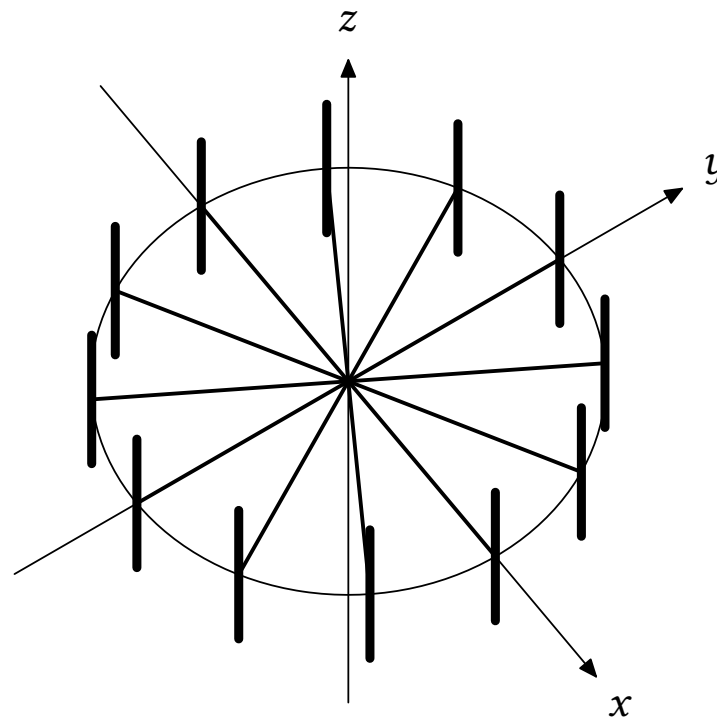
Sinusförmige FM mit Momentanfrequenz

$$\omega_M = \frac{2\pi a}{\lambda_0} \omega \sin \vartheta \sin(\omega t - \varphi).$$

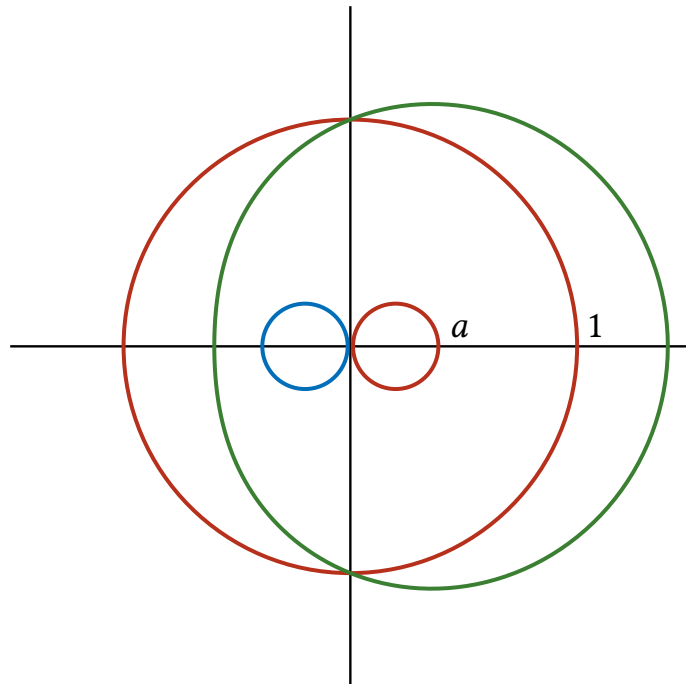
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \vartheta \mathbf{e}_z & \text{Frequenzhub} & \rightsquigarrow \vartheta \\ \mathbf{a}(t) &= a \cos \omega t \mathbf{e}_x + a \sin \omega t \mathbf{e}_y & \text{Phase} & \rightsquigarrow \varphi \end{aligned}$$

## Realisierung eines Dopplerpeilers

Kreisförmige, starr aufgebaute Dipolgruppe mit sequenzieller Abtastung.



## 4.8 Very High Frequency Omnidirectional Radio (VOR)



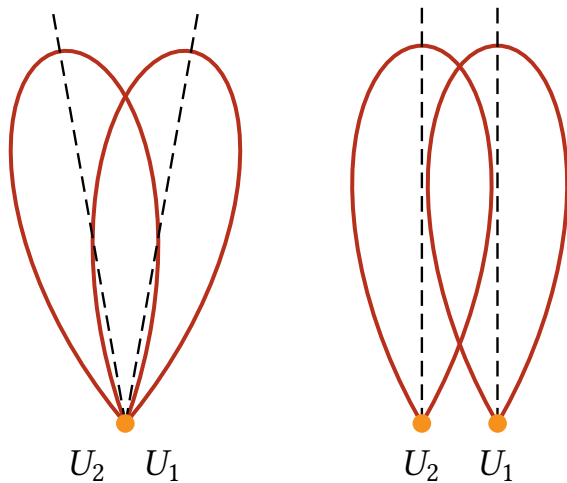
- Kombination Rahmenantenne-Monopol erzeugt eine Richtcharakteristik mit harmonischer Amplitudenschwankung:

$$F_R(\varphi) = 1 + a \cos \varphi .$$

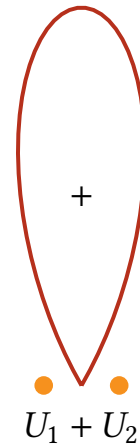
- Durch Rotation der Rahmenantenne mit 30 U/s wird ein mit 30 Hz amplitudenmoduliertes Signal abgestrahlt.
- Zusätzlich wird mit Rundcharakteristik ein 30-Hz-FM-Signal als Referenz abgestrahlt. Die Phase der Modulation dieses Referenzsignals ist 0°, wenn die umlaufende Antenne nach Norden weist.

Die Phasenverschiebung zwischen den beiden empfangenen 30-Hz-Signalen gibt die Richtung an, in der sich der Empfänger von der VOR-Station aus gesehen befindet.

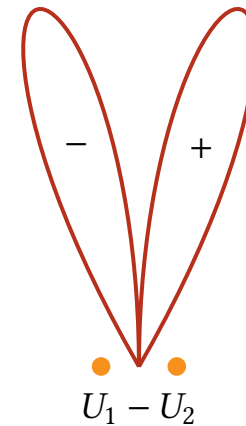
## 4.9 Monopuls-Verfahren



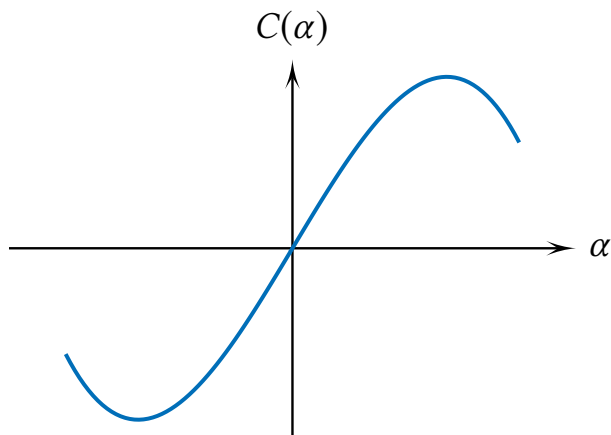
Einzeldiagramme



Summendiagramm



Differenzdiagramm



Winkelkennlinie:

$$C(\alpha) = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2} \cdot$$

Durch die Verhältnissbildung wird  $C(\alpha)$  unabhängig von der Empfangsamplitude.

## 4.10 Instrumentenlandesystem (ILS)

### Hauptbestandteile

**Landekursender** (110 MHz), modulationsabhängige Richtcharakteristik mit  $\pm 90$  Hz- und  $\pm 150$  Hz-Seitenbändern im Azimut

90 Hz  $\rightsquigarrow$  »nach rechts«

150 Hz  $\rightsquigarrow$  »nach links«

**Gleitwegsender** (330 MHz), modulationsabhängige Richtcharakteristik mit  $\pm 90$  Hz- und  $\pm 150$  Hz-Seitenbändern in der Elevation

90 Hz  $\rightsquigarrow$  »tiefer«

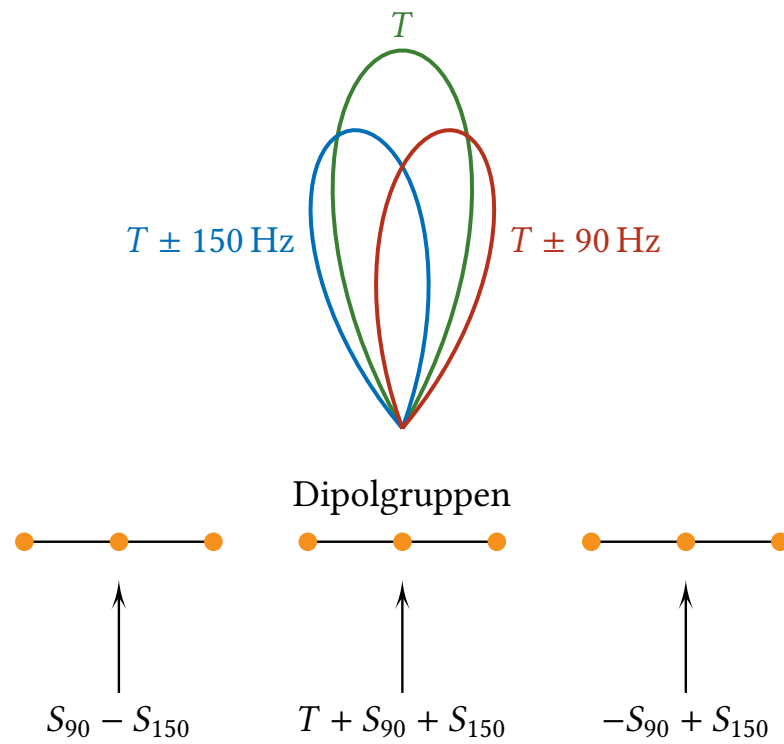
150 Hz  $\rightsquigarrow$  »höher«

**Haupteinflugzeichen** (75 MHz), Gleitweg ist 100 ft über der Landebahn

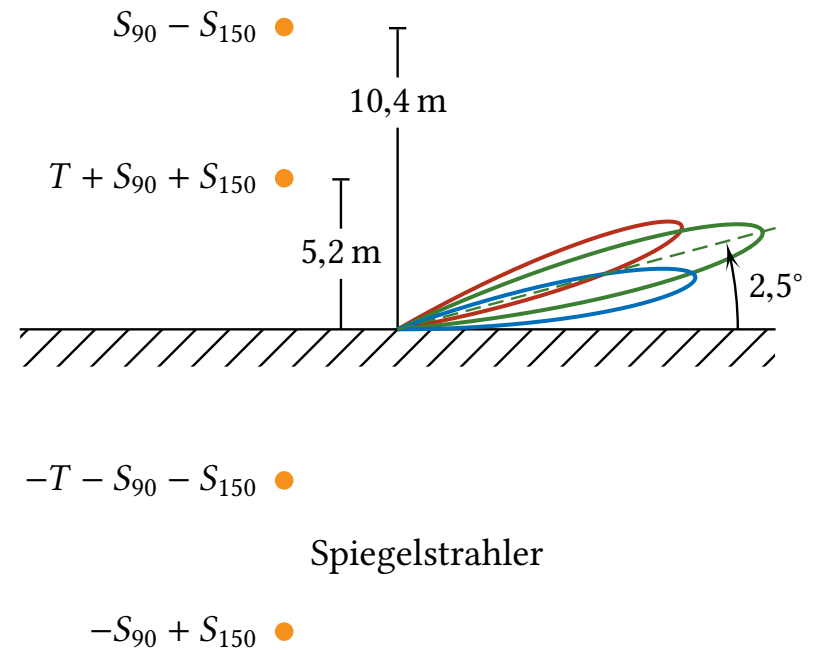
**Voreinflugzeichen** (75 MHz), 4,5 Meilen vor der Landebahn



## Erzeugung einer modulationsabhängigen Richtcharakteristik



ILS-Landekursender



ILS-Gleitwegsender

## 4.11 Satellitennavigation

### Prinzip

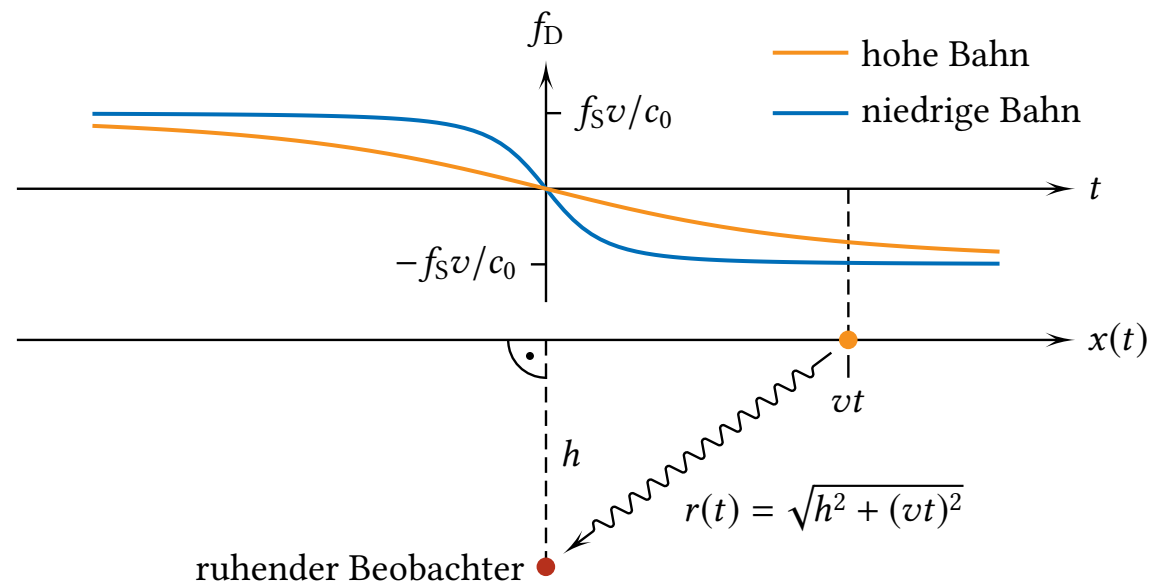
Eigenortung durch Messung der Dopplerverschiebung (Relativgeschwindigkeit des Satelliten) oder durch Laufzeitmessung (Entfernung zu Satelliten).

Durch Analyse des zeitlichen Dopplerverlaufs und/oder durch Abstandsmessung lassen sich Standlinien/Standflächen bezüglich einzelner Satelliten gewinnen.

### Fehlerursachen

- Mehrfachreflexionen (Erdoberfläche, Gebäude, Gelände)
- Fluktuierende Brechung (geänderte Phasengeschwindigkeit) in der Ionosphäre

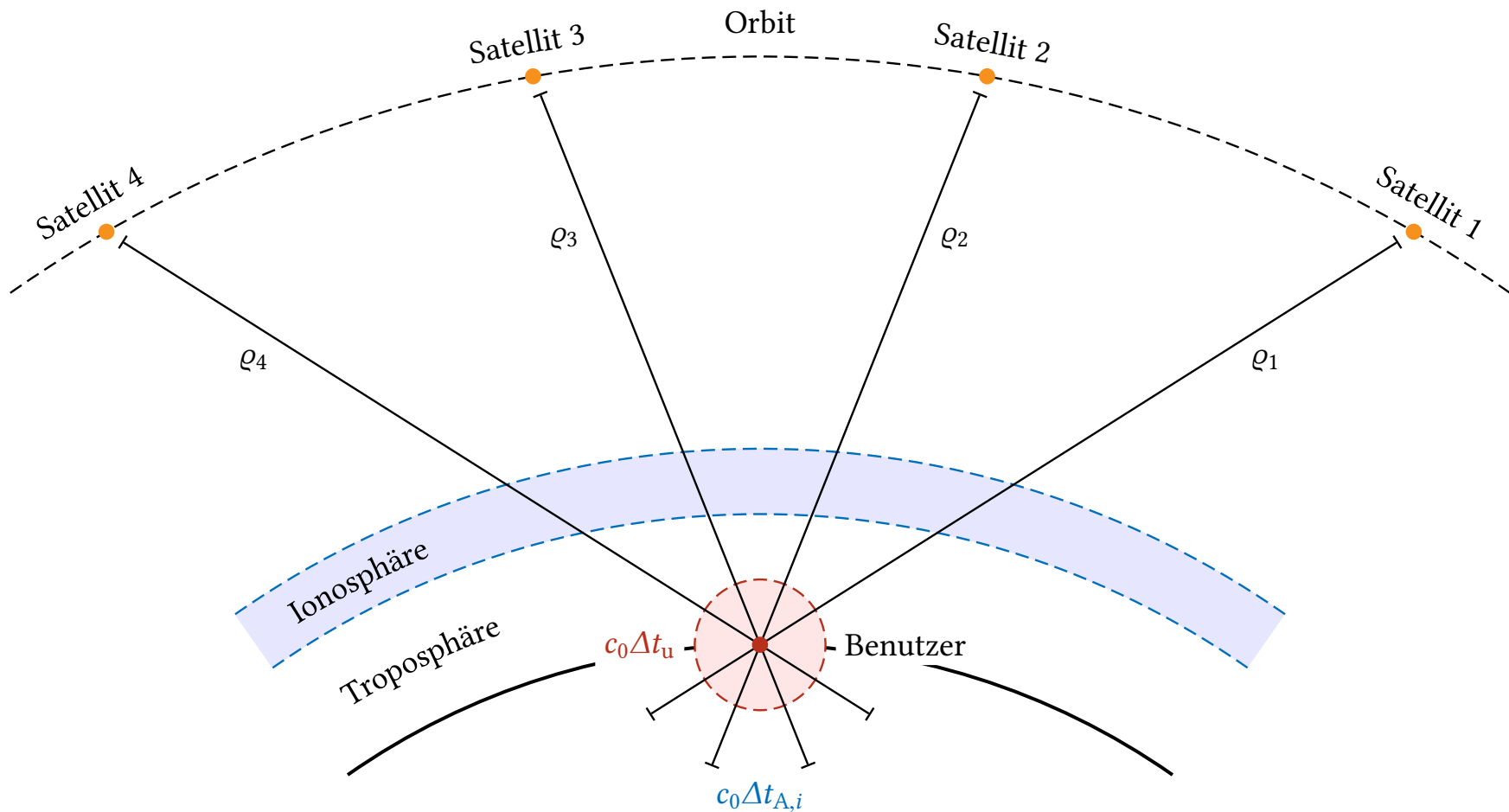
## Zeitlicher Verlauf der Dopplerverschiebung



Maximale Änderung der Dopplerefrequenz bei eindimensionaler Bewegung:

$$\left. \frac{df_D}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{v^2}{\lambda \cdot h} \propto \frac{1}{h}$$

## Global Positioning System (GPS)



## GPS – Technische Daten

Flughöhe .....	20183 km	Modulationsart .....	BPSK
Umlaufdauer $T$ .....	11 h 56 min	Symbolrate C/A-Code .....	1,023 MHz
Satelliten .....	21 + 3	Symbolrate P-Code .....	10,23 MHz
Umlaufbahnen .....	6	Navigationsdaten .....	50 Bit/s
Inklination .....	55°	Sendeleistung .....	+44,3 dBm
Dopplerverschiebung .....	±5 kHz max.	Empfangsleistung .....	-130 dBm

### Frequenzen

L1 .....	1,57542 GHz
L2 .....	1,22760 GHz

Einfluss einer Gangabweichung der GPS-Atomuhren:

$$\frac{\Delta t}{T} = 4 \cdot 10^{-13} \quad \rightsquigarrow \quad \Delta t = 17,3 \text{ ns} \quad \rightsquigarrow \quad \Delta r = 5,2 \text{ m}$$

## GPS – Positionsbestimmung

### Beschreibende Geometrieparameter

Gesuchte Nutzerposition:

$$\mathbf{R}_0 = x_0 \mathbf{e}_x + y_0 \mathbf{e}_y + z_0 \mathbf{e}_z$$

Entfernungsmessfehler aufgrund des Uhrenfehlers  $\Delta t_u$ :

$$\varrho_0 = c_0 \Delta t_u$$

Position des  $i$ -ten Satelliten:

$$\mathbf{R}_i = x_i \mathbf{e}_x + y_i \mathbf{e}_y + z_i \mathbf{e}_z$$

Gemessene Entfernung vom Nutzer zum  $i$ -ten Satelliten inklusive Uhrenfehler (Pseudoentfernung, scheinbare Entfernung):

$$\varrho_i = \|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0\| + \varrho_0$$

Einheitsvektor vom Nutzer in Richtung des  $i$ -ten Satelliten:

$$\mathbf{e}_i = (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0) / \|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0\| = e_{xi} \mathbf{e}_x + e_{yi} \mathbf{e}_y + e_{zi} \mathbf{e}_z$$

## Algebraische Lösung

Das Ortungsproblem hat vier Unbekannte  $x_0, y_0, z_0$  und  $\varrho_0$ . Daher benötigt man Entfernungsmessungen zu vier Satelliten, um daraus die drei Standortkoordinaten und den eigenen Uhrenfehler zu bestimmen.

Die vier Unbekannten  $x_0, y_0, z_0$  und  $\varrho_0$  müssen die vier Gleichungen

$$q_i(\mathbf{R}_0, \varrho_0) = \|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0\|^2 - (\varrho_i - \varrho_0)^2 = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, 4$$

erfüllen. Diese Gleichungen lauten ausgeschrieben

$$\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{R}_0 - 2(\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_0) + \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_i - \varrho_0^2 + 2\varrho_i\varrho_0 - \varrho_i^2 = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, 4.$$

Dieses nichtlineare Gleichungssystem lässt sich wie folgt in drei lineare und eine quadratische Gleichung umformen. Zunächst berechnet man die drei Differenzen

$$q_j(\mathbf{R}_0, \varrho_0) - q_1(\mathbf{R}_0, \varrho_0) = 2(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{R}_0 - 2(\varrho_j - \varrho_1)\varrho_0 - \varrho_1^2 + \varrho_j^2 + \|\mathbf{R}_1\|^2 - \|\mathbf{R}_j\|^2 = 0 \quad ; \quad j = 2, \dots, 4.$$

Es entsteht ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen, welches homogen und linear in den vier Unbekannten  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  und  $\varrho_0$  ist. Falls die Systemmatrix vollen Rang hat, ergeben sich drei abhängige und eine unabhängige Variable, sodass die allgemeine Lösung von der Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \varrho_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_0 \\ \tilde{\varrho}_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}_0 \\ \hat{\varrho}_0 \end{pmatrix}$$

mit dem Parameter  $\lambda$  ist. Für jede dieser Lösungen gilt

$$q_1(\mathbf{R}_0, \varrho_0) = q_2(\mathbf{R}_0, \varrho_0) = q_3(\mathbf{R}_0, \varrho_0) = q_4(\mathbf{R}_0, \varrho_0).$$

Wenn zusätzlich  $q_1(\mathbf{R}_0, \varrho_0) = 0$  gilt, sind alle vier Bedingungen  $q_i(\mathbf{R}_0, \varrho_0) = 0$  erfüllt. Einsetzen der allgemeinen Lösung in die Gleichung für  $q_1(\mathbf{R}_0, \varrho_0) = 0$  ergibt

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{R}}_0\|^2 + 2(\tilde{\mathbf{R}}_0 \cdot \hat{\mathbf{R}}_0)\lambda + \|\hat{\mathbf{R}}_0\|^2\lambda^2 - 2(\mathbf{R}_1 \cdot \tilde{\mathbf{R}}_0) - 2(\mathbf{R}_1 \cdot \hat{\mathbf{R}}_0)\lambda + \|\mathbf{R}_1\|^2 = \\ \tilde{\varrho}_0^2 + 2\tilde{\varrho}_0\hat{\varrho}_0\lambda + \hat{\varrho}_0^2\lambda^2 - 2\varrho_1\tilde{\varrho}_0 - 2\varrho_1\hat{\varrho}_0\lambda + \varrho_1^2, \end{aligned}$$

also eine quadratische Gleichung in  $\lambda$ . Die Lösung liefert zwei mögliche Werte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , von denen einer durch eine grobe Schätzung (z. B.  $\mathbf{R}_0$  auf Erdoberfläche) auszuschließen ist (Quelle: [1, S. 640]).



## Iterative Lösung

Ansatz: Die gemessenen Pseudoentfernungen enthalten einen unbekanntem Fehler:

$$\rho_i = \sqrt{(x_i - x_0 + \delta x)^2 + (y_i - y_0 + \delta y)^2 + (z_i - z_0 + \delta z)^2}.$$

Linearisierung um Schätzwert  $(x_0, y_0, z_0)$  ergibt

$$\rho_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2} - \mathbf{e}_i \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = \|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0\| + B_0.$$

Mit  $\|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0\| = \mathbf{e}_i \mathbf{R}_i - \mathbf{e}_i \mathbf{R}_0$  ergibt sich

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{R}_0 - B_0 = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{R}_i - \rho_i.$$

In ausführlicher Matrix-Notation:

$$\begin{pmatrix} e_{x1} & e_{y1} & e_{z1} & -1 \\ e_{x2} & e_{y2} & e_{z2} & -1 \\ e_{x3} & e_{y3} & e_{z3} & -1 \\ e_{x4} & e_{y4} & e_{z4} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{x1} & e_{y1} & e_{z1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{x2} & e_{y2} & e_{z2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{x3} & e_{y3} & e_{z3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{x4} & e_{y4} & e_{z4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \\ \varrho_3 \\ \varrho_4 \end{pmatrix}$$

Die bestmögliche Lösung  $\mathbf{X}_{\text{opt}} = (x_0 \ y_0 \ z_0 \ B_0)^T$  dieser Gleichung wird durch Iteration (Schätzwert  $\hat{\mathbf{X}}$  ergibt  $\hat{\mathbf{e}}_i$ , danach neue Schätzung  $\hat{\mathbf{X}}$  bis Änderung sehr klein) bestimmt.

## Quellen und weiterführende Literatur

- [1] T. Arens, F. Hettlich, Ch. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger und H. Stachel: *Mathematik*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag GmbH, 2008.
- [2] C. A. Balanis: *Antenna Theory*. 3rd ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2005.
- [3] D. K. Barton: *Modern Radar System Analysis*. Artech House, 1988.
- [4] D. K. Barton and H. R. Ward: *Handbook of Radar Measurement*. Artech House, 1984.
- [5] K. Baur: *Eine Einführung in die Funkortung*. Ulm: Süddeutsche Verlagsgesellschaft, 1996.
- [6] L. Blake: *Radar Principles*. John Wiley & Sons, 1988.
- [7] R. E. Collin: *Antennas and Radiowave Propagation*. New York: McGraw-Hill, 1985.
- [8] J. Detlefsen: *Radartechnik*. Nachrichtentechnik 18. Berlin: Springer, 1989.
- [9] J. Detlefsen: *Radio Navigation and Location*. Lecture Notes. Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik. Technische Universität München, 2003.
- [10] J. Detlefsen und U. Siart: *Grundlagen der Hochfrequenztechnik*. 4. Aufl. München: Oldenbourg, 2012.
- [11] E. Hölzler und H. Holzwarth: *Pulstechnik*. 2. Aufl. Bd. 1. Berlin: Springer, 1986.

- [12] A. Ishimaru: *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991.
- [13] J. D. Kraus: *Antennas*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1988.
- [14] N. Levanon: *Radar Principles*. John Wiley & Sons, 1988.
- [15] A. Ludloff: *Handbuch Radar und Radarsignalverarbeitung*. Braunschweig: Vieweg, 1993.
- [16] W. Mansfeld: *Satellitenortung und Navigation*. 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2010.
- [17] P. Z. Peebles: *Radar Principles*. New York: Wiley & Sons, 1998.
- [18] M. I. Skolnik: *Introduction to Radar Systems*. 3rd ed. Auckland: McGraw-Hill, 2001.
- [19] M. I. Skolnik, ed.: *Radar Handbook*. McGraw-Hill, 1990.
- [20] L. Uhlig u. a.: *Leitfaden der Navigation*. 2. Aufl. Berlin: transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, 1977.