

# Phasenrauschen in Oszillatoren und Sensorsystemen

<http://www.siart.de/lehre/phasenrauschen.pdf>

Uwe Siart  
tutorien@siart.de

9. Juni 2018 (Version 0.21)

## Inhaltsverzeichnis

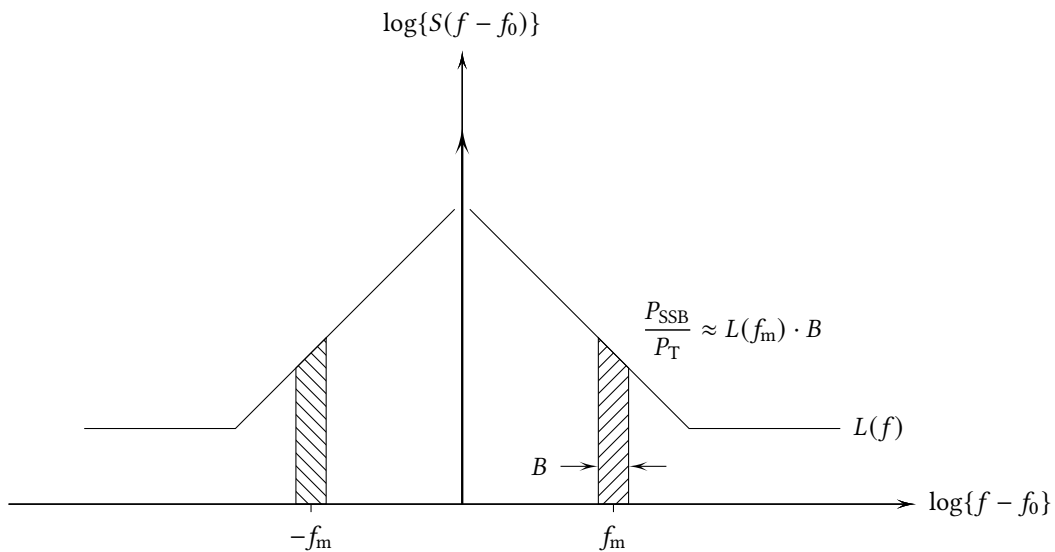
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2 Phasenschwankungen und spektrale Leistungsdichte</b>	<b>2</b>
<b>3 Phasenrauschen bei laufzeitabhängiger Kohärenz</b>	<b>4</b>
<b>4 Phasenrauschen beim FMCW-Radar mit linearer FM</b>	<b>5</b>

## 1 Einführung

Bedingt durch unvermeidliche und allgegenwärtige Rauschprozesse mit verschiedenen Ursachen und Eigenschaften folgt das Ausgangssignal eines Oszillators bei genauer Betrachtung nicht exakt einem harmonischen Verlauf gemäß

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) . \quad (1)$$

sondern es weisen sowohl die Amplitude  $U_0$  wie auch die Phase  $\varphi_0$  statistische Schwankungen auf. Sie entstehen durch Rauschprozesse, welche die Oszillation unmittelbar beeinflussen und solche, die durch die Nichtlinearität der Oszillatorbauelemente spektral verschoben werden und dadurch spektrale Beiträge in der Umgebung von  $\omega_0$  verursachen. Bei der Spezifikation der Oszillatorstabilität unterscheidet man zwischen der *Langzeitstabilität* und der *Kurzzeitstabilität*. Ursachen für langfristige Schwankungen sind zum Beispiel Alterungsprozesse oder durch Temperaturschwankungen verursachte Drift von Bauelementeeigenschaften. Die Langzeitstabilität wird durch die relative Frequenzabweichung innerhalb eines längeren Zeitraums spezifiziert, beispielsweise in  $\pm 10^{-6}$ /Tag. Die Kurzzeitstabilität wird durch momentane Fluktuationen von Amplitude und Phase beschrieben. Man spricht vom *Amplitudenrauschen* und vom *Phasenrauschen*, welche als eine Modulation dieser beiden Größen durch ein Rauschsignal



**Abb. 1:** Schematisierte Darstellung der spektralen Leistungsdichte in der Umgebung von  $f_0$  (Anm.: Die Frequenz  $f = 0$  ist auf der logarithmierten Frequenzachse nicht darstellbar, die auftretende Spektrallinie ist hier zur Repräsentation der Oszillatorleistung aber dennoch eingezeichnet.)

interpretiert werden können. Durch diese Modulation entstehen zu beiden Seiten der Mittenfrequenz  $\omega_0$  so genannte *Rauschseitenbänder*, sodass die Bandbreite des Oszillatorsignals nicht wie im idealen Fall verschwindet sondern eine gewisse endliche Größe aufweist. Die Intensität der Schwankungen wird üblicherweise durch Angabe der relativen Einseitenbandleistung in 1 Hz Bandbreite als Funktion der Ablage von  $\omega_0$  spezifiziert (Abb. 1).

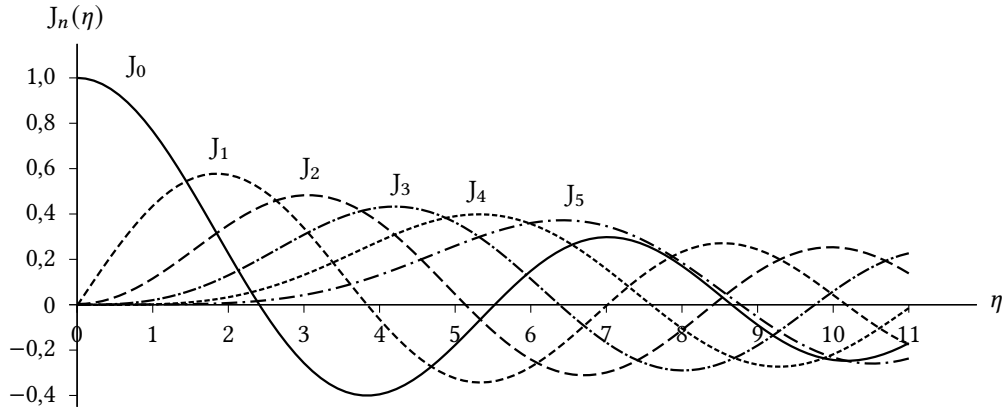
Für Kommunikations- und Sensorsysteme spielt meist nur das Phasenrauschen eine Rolle, da die spektrale Leistungsdichte des Amplitudenrauschens einer Tiefpasscharakteristik folgt [17] und daher zumindest in unmittelbarer Umgebung von  $\omega_0$  gegen die Leistungsdichte des Phasenrauschens vernachlässigt werden kann. Die dominierenden Konsequenzen des Phasenrauschens sind eine Verringerung der Empfindlichkeit von Empfängern durch Überdeckung von Signalen kleiner Leistung, zusätzliches Hintergrundrauschen in Doppler-Radarsystemen und Symbolfehler bei der Demodulation digitaler Kommunikationssignale.

## 2 Phasenschwankungen und spektrale Leistungsdichte

Vernachlässigt man die Amplitudenschwankungen und betrachtet zur Näherung nur die Phasenschwankungen  $\Delta\Phi(t)$  eines Oszillators, dann lautet sein Zeitsignal

$$u(t) = U_0 \cos\{\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\Phi(t)\}. \quad (2)$$

Zur Abschätzung des Zusammenhangs zwischen der Leistung von Phasenschwankungen und der dadurch entstehenden frequenzabhängigen Einseitenbandleistungsdichte wird zur weiteren Vereinfachung eine sinusförmige Phasenschwankung angenommen. Mit der Schwankungs-



**Abb. 2:** Verlauf der Besselfunktionen  $J_n(\eta)$

frequenz  $f_m$  und der Schwankungsamplitude  $\Delta\Phi_{\max}$  ergeben sich die Beziehungen

$$\Delta\Phi(t) = \Delta\Phi_{\max} \cdot \sin(\omega_m t + \varphi) \quad (3)$$

für die aus dieser modellhaften harmonischen Schwankung resultierende momentane Phasenabweichung sowie die hierzu äquivalente momentane Frequenzabweichung über den Zusammenhang  $\Delta\omega(t) = d\Delta\Phi(t)/dt$

$$\Delta f(t) = f_m \Delta\Phi_{\max} \cdot \cos(\omega_m t + \varphi) = \Delta f_{\max} \cdot \cos(\omega_m t + \varphi) \quad (4)$$

mit

$$\Delta\Phi_{\max} = \eta = \frac{\Delta f_{\max}}{f_m} . \quad (5)$$

Dabei ist  $\eta$  der Modulationsindex oder Modulationsgrad der Frequenzmodulation. Das Spektrum des frequenzmodulierten Oszillatorsignals hat unendlich viele einzelne Spektrallinien und kann in der Form

$$u(t) = U_0 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot e^{j((\omega_0+n\omega_m)t+n\varphi+\varphi_0)} \right\} \quad (6)$$

dargestellt werden. Die in dieser Reihenentwicklung auftretenden Besselfunktionen, welche die relative Amplitude der einzelnen Exponentialanteile als Funktion des Modulationsgrads  $\eta$  angeben, sind in Abb. 2 dargestellt.

Bei den hier vorkommenden kleinen Modulationsgraden können Seitenbänder höherer Ordnung vernachlässigt werden. Mit den Näherungen für die Besselfunktionen  $J_0(\eta)$  und  $J_1(\eta)$

$$J_0 \approx 1 \qquad J_1 \approx \eta/2$$

für  $\eta \ll 1$  ergibt sich

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{\eta}{2} U_0 \cos((\omega_0 + \omega_m)t + \varphi + \varphi_0) - \frac{\eta}{2} U_0 \cos((\omega_0 - \omega_m)t - \varphi + \varphi_0) \quad (7)$$

und damit eine auf die Gesamtoszillatorleistung  $P_C$  (engl.: carrier) bezogene Seitenbandleistung  $P_{SSB}$  (engl.: single side band) von

$$\frac{P_{SSB}}{P_C} = \frac{\eta^2}{4} = \frac{\Delta\Phi_{\max}^2}{4} = \frac{\Delta\Phi_{\text{eff}}^2}{2} . \quad (8)$$

Das Phasenrauschen von Oszillatoren wird durch die spektrale Leistungsdichte  $L(f_m)$  beschrieben. Für die Umrechnung gilt bei Betrachtung der Bandbreite  $B$

$$\frac{P_{SSB}}{P_C} = L(f_m) \cdot B . \quad (9)$$

Ein typischer Wert ist zum Beispiel  $L(1 \text{ MHz}) = -90 \text{ dBc/Hz}$ . Für den Effektivwert der Phasenschwankungen ergibt sich

$$\Delta\Phi_{\text{eff}}^2 = 2 \frac{P_{SSB}}{P_C} = 2L(f_m) \cdot B . \quad (10)$$

Die Frequenzschwankungen berechnen sich aus

$$\Delta f_{\text{eff}}^2 = 2f_m^2 \cdot \frac{P_{SSB}}{P_C} = 2f_m^2 L(f_m) \cdot B . \quad (11)$$

### 3 Phasenrauschen bei laufzeitabhängiger Kohärenz

Bei Radaranwendungen entsteht das Empfangssignal zum Zeitpunkt  $t$  durch Mischung des im Augenblick  $t$  gesendeten Oszillatorsignals mit dem vor der Laufzeit  $\tau$  zum Zeitpunkt  $t - \tau$  gesendeten Signal. Die Phasenrauschanteile in Sende- und Empfangssignal sind daher teilweise korreliert. Ein Phasenrauschanteil des Sendeoszillators, der bei der Ablagefrequenz  $f_m$  durch den Phasenhub  $\eta$  gekennzeichnet ist, führt bei Mischung zwischen gesendetem und dem empfangenen Signal im Empfänger zu einem Mischprodukt mit reduziertem Phasenrauschen. Bei Frequenzumsetzung auf eine Zwischenfrequenz ergibt sich:

$$u_{ZF}(t) = U_{ZF} \cdot \cos(\omega_{ZF}t + \Delta\Phi(t - \tau) - \Delta\Phi(t)) \quad (12)$$

wobei

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(t - \tau) - \Delta\Phi(t) &= \eta \left( \sin(\omega_m(t - \tau) + \varphi) - \sin(\omega_m t + \varphi) \right) \\ &= -2\eta \cos(\omega_m t + \varphi - \pi f_m \tau) \sin(\pi f_m \tau) . \end{aligned} \quad (13)$$

Durch die Verwendung gleicher aber zeitlich verzögerter Signale zum Senden und Empfangen sind die Signale bei kleinen Laufzeiten kohärent. Der sich ergebende Phasenhub  $\eta_{ZF}$  des Zwischenfrequenzsignals reduziert sich daher laufzeitabhängig auf

$$\eta_{ZF} = 2\eta |\sin(\pi f_m \tau)| . \quad (14)$$

Die wirksame Seitenbandleistung bei Signalauswertung in der Bandbreite  $B$  liegt dann bei

$$\frac{P_{SSB}}{P_C} = L(f_m) \cdot B \cdot 4 \sin^2(\pi f_m \tau) . \quad (15)$$

#### 4 Phasenrauschen beim FMCW-Radar mit linearer FM

Das Oszillatorsignal eines mit dem Frequenzhub  $\Delta F$  und der Periode  $T$  linear frequenzmodulierten Sendeoszillators enthält bei Berücksichtigung des Phasenrauschens einen zusätzlichen Anteil, der zur Vereinfachung wieder als sinusförmig angenommen werde und durch die maximale Frequenzabweichung  $\Delta f_{\max}$  gekennzeichnet sei. Der Verlauf der Momentanfrequenz des Sendesignals ergibt sich damit zu

$$f_S(t) = f_0 + \frac{\Delta F}{T} \cdot t + \Delta f_{\max} \cos(\omega_m t + \varphi) \quad (16)$$

für  $nT - T/2 < t < nT + T/2$ . Für die Phase des Sendesignals erhält man

$$\begin{aligned} \varphi_S(t) &= 2\pi \int_{-T/2}^t f_S(t') dt' = 2\pi \left[ f_0 t' + \frac{1}{2} \frac{\Delta F}{T} t'^2 + \frac{\Delta f_{\max}}{\omega_m} \sin(\omega_m t' + \varphi) \right]_{-T/2}^t \\ &= \omega_0 t + \pi \frac{\Delta F}{T} t^2 + \frac{\Delta f_{\max}}{f_m} \sin(\omega_m t + \varphi) + \varphi_0 . \end{aligned} \quad (17)$$

Das Empfangssignal in der Verarbeitungsebene entsteht durch Mischung des Sende- und des um die Laufzeit  $\tau$  verzögerten Empfangssignals und ist gegeben durch

$$u_D(t) = U_D \cdot \cos(\varphi_S(t) - \varphi_E(t)) \quad (18)$$

mit  $\varphi_E(t) = \varphi_S(t - \tau)$ . Eine Fourieranalyse des (nicht amplitudenbewerteten) Empfangssignals für ein Objekt mit einer Laufzeit  $\tau_0$  führt auf eine spektrale Verteilung gemäß

$$I(f) = \frac{\sin(\pi \Delta F (\tau - \tau_0))}{\pi \Delta F (\tau - \tau_0)} \cdot e^{j\omega_0 (\tau - \tau_0)} . \quad (19)$$

Im Falle der Berücksichtigung des Phasenrauschens wird daraus

$$I(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(2\pi \Delta f_{\max} \tau_0) \frac{\sin(\pi \Delta F (\tau - \tau_0) + n\pi f_m T)}{\pi \Delta F (\tau - \tau_0) + n\pi f_m T} \cdot e^{j(\omega_0 (\tau - \tau_0) + n\varphi)} . \quad (20)$$

Für kleine Argumente der Besselfunktionen können die üblichen Näherungen verwendet werden. Es ergeben sich nur für  $n = \pm 1$  durch das Phasenrauschen bedingte Nebenmaxima, die zu berücksichtigen sind, weil sie zum Beispiel ein weiteres Ziel kleiner Amplitude überdecken könnten. Für den relativen Pegel erhält man mit

$$\Delta f_{\text{eff}}^2 = 2f_m^2 L(f_m) B \quad (21)$$

den Ausdruck

$$\frac{P_{\text{Nebenmaximum}}}{P_{\text{Ziel}}} = \left( \frac{J_1}{J_0} \right)^2 = (\pi \Delta f_{\max} \tau_0)^2 = (\omega_m \tau_0)^2 L(f_m) B . \quad (22)$$

## Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

Symbol	Einheit	Bedeutung
$B$	Hz	Bandbreite
$J_n$	1	Besselfunktion $n$ -ter Ordnung
$L$	dBc/Hz	relative spektrale Leistungsdichte
$P_C$	W	Trägerleistung
$P_{SSB}$	W	Einseitenbandleistung
$T$	s	Modulationsperiode
$U_0$	V	Amplitude der Oszillatorspannung
$e$	1	Eulersche Zahl $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$
$f_0$	Hz	Soll-Frequenz
$f_m$	Hz	Modulationsfrequenz
$j$	1	imaginäre Einheit ( $j^2 = -1$ )
$t$	s	Zeit
$u$	V	Oszillatorspannung
$\Delta F$	Hz	Frequenzhub
$\Delta\Phi$	rad	Phasenabweichung
$\eta$	1	Modulationsindex
$\pi$	1	Ludolfsche Zahl
$\tau$	s	Laufzeit
$\varphi_0$	rad	statische Phase
$\omega_0$	rad/s	Soll-Kreisfrequenz
$\omega_m$	rad/s	Modulations-Kreisfrequenz

## Literatur

- [1] W. Anzill: »Berechnung und Optimierung des Phasenrauschens von Oszillatoren«. Diss. Technische Universität München, 1995.
- [2] E. J. Baghdady, R. N. Lincoln, and B. D. Nelin: "Short-Term Frequency Stability: Characterization, Theory, and Measurement". In: *Proceedings of the IEEE* (July 1965), pp. 704–722.
- [3] O. Baran and M. Kasal: "Oscillator Phase Noise Models". In: *Radioelektronika, 18th International Conference*. April 24–25, 2008, pp. 1–4.
- [4] J. Detlefsen: *Radartechnik*. Nachrichtentechnik 18. Berlin: Springer, 1989.
- [5] W. A. Edson: "Noise in Oscillators". In: *Proc. IRE* 48 (1960), pp. 1454–1466.
- [6] *Fundamentals of RF and Microwave Noise Figure Measurements*. Application Note 57-1. Agilent Technologies. October 2000.
- [7] A. Hajimiri and T. H. Lee: "A General Theory of Phase Noise in Electrical Oscillators". In: *IEEE Journal of Solid-State Circuits* JSSC-33.2 (February 1998), pp. 179–194.
- [8] A. Hajimiri and T. H. Lee: "Corrections to 'A General Theory of Phase Noise in Electrical Oscillators'". In: *IEEE Journal of Solid-State Circuits* JSSC-33.6 (June 1998), p. 928.
- [9] F. X. Kärtner: "Analysis of White and  $f^{-\alpha}$  Noise in Oscillators". In: *Int. Journ. Circuit Theory Applicat.* 18 (1990), pp. 485–519.

- [10] F. X. Kärtner: "Determination of the Correlation Spectrum of Oscillators with Low Noise". In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* MTT-37.1 (1989), pp. 90–101.
- [11] R. Knöchel and K. Schünemann: "Noise in Multiple-Device Oscillators". In: *Archiv Elektronik und Übertragungstechnik* AEÜ-36.10 (1982), pp. 31–39.
- [12] T. H. Lee and A. Hajimiri: "Oscillator Phase Noise: A Tutorial". In: *IEEE Journal of Solid-State Circuits* JSSC-35.3 (March 2000), pp. 326–336.
- [13] K. März: »Phasen- und Amplitudenschwankungen in Oszillatoren«. In: *Archiv Elektronik und Übertragungstechnik* AEÜ-24.11 (1970), S. 477–490.
- [14] *Phase noise test with the Agilent 8644A and 8665A Signal Generators*. Product Note 8644A-1. Agilent Technologies. September 2000.
- [15] R. S. Raven: "Correction to 'Requirements on Master Oscillators for Coherent Radar'". In: *Proceedings of the IEEE* 55.8 (August 1967), p. 1452.
- [16] R. S. Raven: "Requirements on Master Oscillators for Coherent Radar". In: *Proceedings of the IEEE* 54.2 (February 1966), pp. 237–243.
- [17] P. Russer: *Hochfrequenztechnik* 3. 1. Aufl. Skriptum zur Vorlesung. Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik. Technische Universität München, 1989.
- [18] B. Schiek und H.-J. Siweris: *Rauschen in Hochfrequenzschaltungen*. Heidelberg: Hüthig, 1990.
- [19] H. J. Siweris and B. Schiek: "Analysis of Noise Upconversion in Microwave FET Oscillators". In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* MTT-33.3 (March 1985), pp. 233–242.
- [20] T. Wu, X. H. Tnag, and F. Xiao: "Research on the Coherent Phase Noise of Millimeter-Wave Doppler Radar". In: *Progress in Electromagnetics Research Letters* 5 (2008), pp. 23–34.